Cvičení 10: Vázané stavy ve 3D - sférická symetrie.

Úloha 1: Sférická potenciálová jáma

Najděte podmínku pro to, aby ve sférické potenciálové jámě hloubky V_0 a poloměru a existovaly, 1, 2, 3 vázané s-stavy. Jaká musí být hloubka jámy pro existenci vázaného p-stavu. Jak vypadají vlnové funkce a energie vázaných s- a p-stavů pro jámu nekonečné hloubky?

Nápověda:

$$\begin{array}{rlrl}
Y_{00}= & \frac{1}{\sqrt{4\pi}} & j_0(z)= & \frac{\sin z}{z} \\
Y_{1\pm1}= & \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x\pm iy}{r} & j_1(z)= & \frac{\sin z}{z^2}-\frac{\cos z}{z} \\
Y_{10}= & \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{r} & j_2(z)= & \left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\sin z-\frac{3}{z^2}\cos z \\
Y_{2\pm2}= & \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\frac{(x\pm iy)^2}{r^2} & n_0(z)= & -\frac{\cos z}{z} \\
Y_{2\pm1}= & \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{z(x\pm iy)}{r^2} & n_1(z)= & -\frac{\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z} \\
Y_{20}= & \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2} & n_2(z)= & -\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cos z-\frac{3}{z^2}\sin z
\end{array}$$

Úloha 2: Rozpad atomu tritia

Jádro atomu tritia se přemění β-rozpadem na jádro hélia. Předpokládejte, že rozpad proběhl velmi rychle, takže vlnová funkce elektronu se nezměnila. S jakou pravděpodobností bude ion po rozpadu v základním stavu? S jakou pravděpodobností jej nalezneme v prvním excitovaném stavu?

Úloha 3: Atom vodíku

Jaká je pravděpodobnost nalézt elektron v atomu vodíku (v základním stavu) dále od protonu, než kolik povoluje klasická fyzika?

Nápověda:

$$\text{Pro}\quad V(x)=\gamma/r,\qquad E_n=-\frac{m\gamma^2}{2\hbar^2 n^2},\qquad a=\frac{\hbar^2}{m|\gamma|}$$

$$R_{10}(r)=2\sqrt{\frac{1}{a^3}}\exp(-r/a),\quad R_{20}(r)=\sqrt{\frac{1}{2a^3}}(1-r/2a)\exp(-r/2a),\quad R_{21}(r)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6a^3}}r/a\exp(-r/2a).$$

Úloha 4: Vytvářející funkce Laguerrových polynomů

$$S(t,x)=\frac{1}{(1-t)^{a+1}}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^a(x)t^n$$

Dokažte, že ($a>0$):

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^a e^{-x}L_m^a(x)L_n^a(x)\mathrm{d}x &= \delta_{mn}\frac{\Gamma(a+n+1)}{n!}, \\
\int_0^\infty x^{a+1}e^{-x}[L_n^a(x)]^2\mathrm{d}x &= \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(2n+a+1)}{n!}, \\
\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}[L_n^a(x)]^2\mathrm{d}x &= \sum_{m=0}^{n}\frac{\Gamma(a+m)}{m!}.
\end{aligned}$$