IV. Formalismus QM. - II

QM-F-1

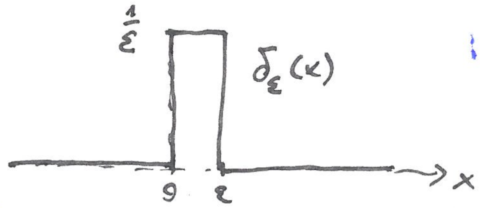
Řekli jsme, že stavovým prostorem částice je $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, tj.

$|\psi\rangle = \int \psi(x)|x\rangle dx$ ... stav prostor izomorf. s prost. $\forall \psi$

$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \int \psi^*(x)\psi(x)dx < \infty$

Jak vypadají bázové vektory $|x\rangle$?

Diracova δ-funkce:



můžeme chápat jako limitu $\varepsilon \to 0$:

... částice lokalizovaná se stejnou hustotou pravděpodobnosti v celém intervalu $\langle 0, \varepsilon\rangle$

problém: $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x)$ není dobře def. v $\mathcal{H}$

přesněji – chápáno jako lim bod po bodu .. $\delta_0 = 0$ skoro všude ($\delta_0(0) = \infty$)

– chápáno jako lim v $\mathcal{H}$ není Cauchy, neboť $\|\delta_\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \to \infty$

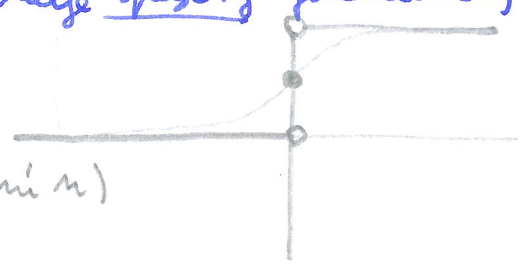
„Rigged" Hilbertův prostor: $\underline{\mathcal{H}}$ hustá podmn. v $\mathcal{H}$; $\overline{\mathcal{H}} \equiv \underline{\mathcal{H}}^*$ .. lin. spoj. funkcionály na $\underline{\mathcal{H}}$

PŘ: $\underline{\mathcal{H}} = \{\forall \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R});\ |\psi^{(n)}(x)(1+|x|)^m| < K \ \forall m,n\}$ Schwartz space

v $\mathbb{R}^n$ obec.: $\sup |x^\alpha D^\beta f| < \infty \ \forall \alpha, \beta$ .. multiindexy

PŘ: $\delta_\varepsilon(x)$ jako lin. funkcionál $F_\varepsilon[\psi] \equiv \int \delta_\varepsilon(x)\psi(x)dx$

opět F_ε nemá limitu v $\mathcal{H}^*$ (nedefinuje spojitý funkcionál)



př: posl fcí $\phi_n(x) = \frac{1}{1+e^{-nx}} \xrightarrow{n\to\infty} \theta(x)$

přitom: $F_\varepsilon[\phi_n] \longrightarrow \frac{1}{2}$ ($\varepsilon \to 0$, fixní n)

ale $F_\varepsilon[\phi_\infty] = 1$ $\forall \varepsilon > 0$

... volba $\underline{\mathcal{H}}$ spojité funkce $F_\varepsilon[\psi(x)] \longrightarrow \delta[\psi(x)] = \psi(0)$

- další důležitá fce, která není v $\mathcal{H}$: e^{ipx} ... je v $\overline{\mathcal{H}}$, pokud volíme testovací fce dostatečně ubývající.

většinou: $\underline{\mathcal{H}}$ ... $\forall$ fce z C^∞ ubývající rychleji než $\forall$ mocnina $|x|^n$ v ∞ (i jejich derivace)

... funkce jako $\delta(x - x_0)$, e^{ikx}, $\sin kx$ můžeme zahrnout jako prvky $\overline{\mathcal{H}}$

Jiný příklad: $\ell^2 = \mathcal{H}$; $\underline{\mathcal{H}} = \forall$ posl c_n: $\sum_n |c_n|^2 n^m < \infty$ $\forall m = 0, 1, 2, \dots$

potom $\overline{\mathcal{H}}$ lze ztotožnit .. prostor $\forall v_n$: $\sum_n v_n^* c_n < \infty$ $\forall c_n \in \underline{\mathcal{H}}$

Další důležité příklady δ-limit:

- $\delta_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \delta(x)$ Lorentz
- $\delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \xrightarrow[\alpha\to \infty]{} \delta(x)$ Gauss

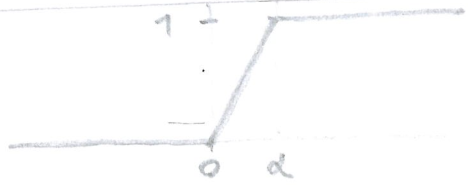
důležitý případ: $\delta_\alpha(x) = \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \delta(x)$ ..

... základ Fourier. transformace:

$$\int e^{ikx}\,dk \longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx}\,dk = \frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{ix} = \frac{2\sin\alpha x}{x} \underset{\alpha\to\infty}{=} 2\pi\delta(x)$$

neboli $\boxed{\int e^{2\pi i k x}\,dk = \delta(x)}$

užitečný vztah: $\delta(x) = \theta'(x)$ ... $\lim_{\alpha\to 0}$



Použití δ(x) jako báze:

vztah $|\psi\rangle = \int \psi(x')\,|x'\rangle\,dx'$ ... báze v L^2 $|x'\rangle = \delta(\xi - x')$

$$= \int \psi(x')\,\delta(\xi - x')\,dx' = \psi(\xi) \checkmark$$

koef. rozvoje do báze: $\langle n|\psi\rangle = \psi_n$ ... zde $\langle x'|\psi\rangle = \int \delta(\xi - x')\,\psi(\xi)\,d\xi = \psi(x')$ ✓

pozor ... $|x\rangle$ nejde normovat konvenčním způsobem: $\cancel{\langle x|x\rangle = 1}$

místo toho $\langle x|x'\rangle = \int d\xi\, \delta(x-\xi)\,\delta(x'-\xi) = \delta(x-x')$

... analogie $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$

Rozklad $\hat{I}$: $I = \sum_n |n\rangle\langle n|$ ... zde: $|x_0\rangle = \delta(x - x_0)$

$\langle x_0| = \delta(x-x_0)^* = \delta(x-x_0)$

tj. $I = \int dx_0\, |x_0\rangle\langle x_0| = \int dx_0\, \delta(\xi - x_0)\,\delta(\xi' - x_0) = \delta(\xi - \xi')$

... zápis I v x-reprezentaci $\langle x|I|x'\rangle \equiv \langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$

zápis operátoru Q: $Q|x\rangle = x|x\rangle$

$$\langle x|Q|x'\rangle = \int d\xi\, \delta(x-\xi)\,x'\,\delta(x'-\xi) = x'\delta(x-x') = x\,\delta(x-x')$$

Více o operátorech

$A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A)$; $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ .. hustá množina

$\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{H}$ ... obor hodnot. .. jinak nevíme dost. dobře jak aplikovat na $\forall |\psi\rangle$

Def: omezený operátor: $\exists M : \frac{\|A\psi\|}{\|\psi\|} \le M \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$

def: norma operátoru $\|A\| = \sup\limits_{\|\psi\| \le 1} \|A\psi\|$

pozn: spojitost ... v ∞ dim ... $\forall$ lin oper. je spojitý

v $\mathcal{H}$: lin operátor je spoj. $\Leftrightarrow$ omezený

PŘ: • unitární operátor $\|U\| = 1$ protože $\|U\psi\| = \|\psi\|$

• P .. projektor $\|P\| < 1$ neboť

$$\|P\psi\|^2 = \langle P\psi | P\psi\rangle = |\langle\psi|P\psi\rangle| \overset{\text{Schwarz}}{\le} \|\psi\| \cdot \|P\psi\| \quad \text{tj} \quad \frac{\|P\psi\|}{\|\psi\|} \le 1$$

Pozn: díky spojitosti lze omez. oper. dodef. (rozšířit) na $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(A)}$

... úplnost .. $\forall$ cauchy $\psi_n \to \psi$ ... $A\psi_n$ je rovněž Cauchy $\to \exists A\psi$

PŘ: F.T. $\int f(x)\, e^{2\pi i k x} dx$ ... je def. na L_1 nebo na $\mathcal{S}$ + rozšíření

$\equiv F[f]$ ... $\|F\| = 1$

Problém: v QM se často setkáváme s neomez. operátory:

$\exists \psi_n \in \mathcal{H} : \|\psi_n\| = 1 : \|A\psi_n\| \to \infty$ a $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$

PŘ: $\hat{x}\,\psi(x) = x\,\psi(x)$ ... $\mathcal{D}(A) = \{\psi(x) \in \mathcal{H} \,|\, \int x^2 |\psi|^2 dx < \infty\}$

není omez: $\psi_n(x) =$ 

$\|\hat{x}\psi_n\|^2 = \int_n^{n+1} x^2 dx = \frac{1}{3}(3n^2 + 3n + 1) \to \infty$

podobně: $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ... $\psi_n = N_n e^{inx}$ ... $\|\hat{p}\psi_n\| = \hbar n \|\psi_n\| \to \infty$

... Rigged spaces: $\mathcal{H} \equiv \mathcal{D}$ ... vl. vektory v $\overline{\mathcal{H}}$ ... $\delta(x-\xi)$; $e^{\frac{i}{\hbar}p\xi}$

nebo nahrazení spektrálního rozkladu projektorovou mírou

...

MATEMATICKÉ FOUSY .. KOPÁČEK

Spektum lineárního operátoru

v $\not\infty$ dim: $A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle \iff |A-\lambda I| = 0$

$\{\forall\lambda\}$ = spektrum (diskrétní) ... spekt. rozklad $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda$

$P_\lambda = \sum_{|\phi\rangle \text{ pro fix } \lambda} |\phi\rangle\langle\phi|$

v ∞ dim: def. nemá smysl.

~~Matem. fousy: Symetrický x samosdružený operátor.~~

Def: (spektrum lin. operátoru):

$\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme bodem spektra $\lambda \in \sigma(A)$ pokud $(A-\lambda I)$ není prosté a $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}$.

Možnosti: (i) $(A-\lambda)$ není prosté, tj. $\exists\, \psi \neq 0 : (A-\lambda)\psi = 0$.

tj. $\psi \in \ker(A-\lambda)$ ... $\lambda \in \sigma_p(A)$ ... bodové spektrum ~~(diskrétní)~~

(ii) $(A-\lambda)$ prosté, ale $\mathcal{R}(A-\lambda) \neq \mathcal{H}$

a) $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda)} = \mathcal{H}$ ... hustá v $\mathcal{H}$ .. $\lambda \in \sigma_c(A)$ .. spojité spektrum

b) $\overline{\mathcal{R}(A-\lambda)} \neq \mathcal{H}$ ... $\lambda \in \sigma_R$ ... reziduální spektrum

Tele se operátory s σ_R zabývat nebudeme.

def: Normální operátor: $[A, A^+] = 0$ pak $\lambda \in \sigma(A) \iff \exists\, \varphi_n \in \mathcal{H}, \|\varphi_n\| = 1, \lim_{n\to\infty} (A-\lambda)\varphi_n = 0$

PŘ: operátor $\hat{x}$ ... posloupnost $\varphi_n = \sqrt{n}\, \chi_{\langle x_0, x_0 + \frac{1}{n}\rangle}$ .. $\|\varphi_n\| = 1$

přičemž $\|(\hat{x}-x_0)\varphi_n\|^2 = \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} (x-x_0)^2 n\, dx = n \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} n^{-2} \to 0$

ale φ_n není Cauchy (výše) ... má však limitu v $\overline{\mathcal{H}}$ $\to \delta(x-x_0)$

(po přenormování ... norma na $\overline{\mathcal{H}}$ je jiná než na $\mathcal{H}$)

- více o normálních operátorech: ... spec. př. .. $A = A^+$; $U^+ = U^{-1}$

v $\not\infty$ dim: 1) $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow A^+|\psi\rangle = \lambda^*|\psi\rangle$ ... unit. $\lambda^* = \lambda^{-1}$ ... $|\lambda| = 1$

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vl. č. $\Rightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$

3) vl. v. tvoří ON bázi

důvod: každý operátor mohu rozložit: $A = \frac{A+A^+}{2} + i\frac{A-A^+}{2i} = C + iD$,

kde C, D hermitovské navíc $[A, A^+] = 0 \Rightarrow [C, D] = 0$

tj. mají spol. bázi vl. v.

Normální operátor ... komplex. zobecnění reál. Hermit. operátoru další matematické fousy:

Symetrický × Samosdružený operátor:

symetrický (Hermitovský): $(A\varphi,\psi)=(\varphi,A\psi)$ $\quad\forall\,\varphi,\psi\in\mathcal{D}(A)$

samosdružený ... navíc $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A^+)$

(pozn: relace $(\psi,A\varphi)=(A^+\psi,\varphi)$ může definovat $A^+|\psi\rangle$ i pro ψ mimo $\mathcal{D}(A)$)

pojem samosdruženosti (a spektra) podstatně závisí na prostoru na němž def A!

Př: $D=-i\frac{d}{dx}$ .. neomezený, symetrický (v záv. na prostoru):

$$\langle\phi|D^+|\psi\rangle\equiv\langle D\phi|\psi\rangle=i\int_a^b\phi^{*\prime}(x)\,\psi(x)\,dx \quad = \text{(per partes)}$$

$$= i\left[\psi(x)\phi^*(x)\right]_a^b-i\int\phi^*(x)\,\psi'(x)\,dx=[\ \ ]+\langle\phi|D|\psi\rangle$$

tj. závisí na okraj. podm.: $\qquad Pe^{i\lambda x}=\lambda e^{i\lambda x}$

(a) fce na $(-\infty,\infty)$ bez podm.: P není sym; $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ je vl. č.

(b) fce omezené pro $|x|\to\infty$: P nesym.; $\lambda\in\mathbb{R}$ jsou vl. č.

(c) na $\langle 0,L\rangle$ period. fce: P symetrický $\lambda=\lambda_n=\frac{2\pi n}{L}$ $n\in\mathbb{Z}$ vl. č.

(d) fce na $(-\infty,\infty)$; $|\phi|\to 0$ pro $|x|\to\infty$: P symetrický ale nemá vl. fce.

- **Samosdružený operátor** má úplnou množinu (zobecněných) vlastních funkcí:

Spektrální rozklad: $\quad I=\int P_a\,da+\sum_n \cancel{|a_n\rangle\langle a_n|}\,P_n$ ← úplnost

$$A=\int a\,P_a\,da+\sum_n a_n P_n \quad \boxed{=\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_{a\in\sigma(A)} aP_a}$$

v případě ~~de~~ nedegener. spektra: $P_n=|a_n\rangle\langle a_n|$ $\quad P_a=|a\rangle\langle a|$

degenerované: $P_n=\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_\alpha |a_n,\alpha\rangle\langle a_n,\alpha|$, $\quad P_nP_{n'}=P_n\delta_{nn'}$

$P_a=\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_\alpha |a,\alpha\rangle\langle a,\alpha|$, $\quad P_aP_{a'}=P_a\,\delta(a-a')$

↑ ortogonalita

PŘ: v $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^3)$ operátor $Q_1\equiv\hat{x}_1$

$$\hat{x}_1=\int dx_1\,x_1\,P_{x_1}\ ;\ \text{kde}\ P_{x_1}=\int dx_2\,dx_3\,|x_1x_2x_3\rangle\langle x_1x_2x_3|$$

tj. $=\int dx_1\,dx_2\,|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|$

nebo $\hat{x}_1=\int d^3x\,x_1\,|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|$

Příklady operátorů se spojitým i diskr. spektrem uvidíme později (H pro systém s ~~s~~ vázanými stavy)

pozn: $f(\hat{A})=\sum\!\!\!\!\!\!\!\int_a f(a)\,\hat{P}_a$

pozn: samosdr. $\hat{A}$ omezený $\Leftrightarrow$ $\sigma(\hat{A})$ omez. $\|\hat{A}\|=\sup\sigma(\hat{A})$

matematické fousy? co je $|x\rangle\langle x|$ za objekt? **QM-F-6**

→ my budeme pracovat intuitivně... např. $|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \psi(x)\cdot|x\rangle$

podrobněji:

<u>Spektrální teorém:</u> $\forall$ samosdružený operátor A

$\exists$ funkce $E(\lambda)$; kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a E je projekční operátor na $\mathcal{H}$

taková, že:

1) $\forall \lambda_1 < \lambda_2$: $E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_2)E(\lambda_1) = E(\lambda_1)$
2) $\forall |\psi\rangle$: $E(\lambda+\varepsilon)|\psi\rangle \to E(\lambda)|\psi\rangle \quad \varepsilon \to 0+$
3) $E(\lambda)|\psi\rangle \to 0$; $\lambda \to -\infty$
4) $E(\lambda)|\psi\rangle \to |\psi\rangle$; $\lambda \to +\infty$
5) $\int \lambda\, dE(\lambda) = A$

kde $\int f(\lambda)\, dE(\lambda)$ je definovaný jako (Stieltjesův integrál):

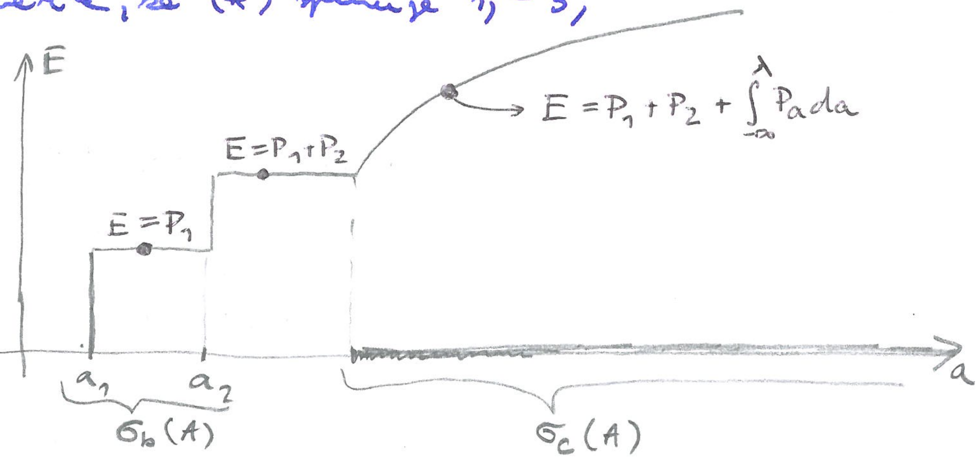
$$\int f(\lambda)\, dE(\lambda) \equiv \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\lambda \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\left[E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\right]$$

<u>poznámka:</u>

- Tato formulace je krok, jak napsat předchozí formulaci v $\bar{\mathcal{H}}$ do $\mathcal{H}$. Přitom $E(\lambda) = \sum_{a_n<\lambda} P_n + \int_{a<\lambda} P_a\, da$ (*)

→ ověřte, že (*) splňuje 1) – 5)

Ad 5):



tj. pro spojité spektrum:

$$\int \lambda\, dE(\lambda) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \underset{\lambda_k}{\underset{\parallel}{f(\lambda_k)}} \underbrace{\left[E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\right]}_{\Delta\lambda_k \to 0 \;\ldots\; E \text{ spojité}:\ \Delta E \doteq \frac{dE}{d\lambda}\cdot\Delta\lambda} = \sum \lambda_k \frac{dE}{d\lambda}(\lambda_k)\cdot\Delta\lambda$$

$$\xrightarrow[\Delta\lambda\to 0]{} \int \lambda \frac{dE(\lambda)}{d\lambda}\, d\lambda = \int \lambda P_\lambda\, d\lambda$$

neboť $\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\lambda} P_a\, da = P_\lambda$ tj. $\boxed{\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = P_\lambda}$

ale $E(\lambda)$ má smysl i $\mathcal{H}$; P_λ jen v $\bar{\mathcal{H}}$

diskrétní spektrum:

stačí si uvědomit, že $E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}) \neq 0$ jen v okolí bodů spektra a tam je $E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}) = P_n$ .. $\lambda_k \geq a_n > \lambda_{k-1}$

tj: $\int \lambda \, dE(\lambda) = \sum_n a_n P_n$

lze také chápat jako $E(\lambda) = \sum_n \theta(\lambda - a_n) P_n$ potom:

$$\int \lambda \, dE(\lambda) = \int \lambda \frac{dE}{d\lambda} \cdot d\lambda = \int \lambda \sum_n \underbrace{\frac{d}{d\lambda}\theta(\lambda-a_n)}_{\delta(\lambda-a_n)} P_n \, d\lambda = \sum_n a_n P_n$$

Doplnění k axiomům QM

A1 Stav systému je dán paprskem v $\mathcal{H}$.

A2 Každé dynamické proměnné (měřitelné veličině, pozorovatelné) odpovídá samosdružený lineární operátor, jehož spektrum udává možné výsledky měření.

A3 Výsledky měření předpovídáme pomocí spektrálního rozkladu operátoru:

hustota pravděpodobnosti nalezení hodnoty a ve stavu $|\psi\rangle$

$$p_\psi(a)\,da = \langle\psi|\hat{P}(a)|\psi\rangle\,da \qquad (= \langle\psi|dE(a)|\psi\rangle)$$

pravděpodobnost nalezení hodnoty $a \in M$:

$$p = \int_M p_\psi(a)\,da$$

stav po měření: $|\psi'\rangle = \int_M P(a)|\psi\rangle\,da \qquad (= \int_M dE(a)|\psi\rangle)$

pozn: – dále platí $p = \langle\psi'|\psi'\rangle \equiv \|\psi'\|^2$ .. $\langle\psi'|\psi'\rangle = \int_M\int_M \langle\psi|\underbrace{P(a')P(a)}_{\delta(a,a')I}|\psi\rangle\,da\,da'$

– p nalezení vůbec nějaké hodn. $= 1 = \int_{\mathbb{R}} p_\psi(a)\,da = \langle\psi|\hat{I}|\psi\rangle$, $\int_{\mathbb{R}} P_a\,da$

PŘ: Pravděpodobnost nalezení částice v místě $x \in \langle a,b\rangle$ (1D):

.. částice ve stavu $|\psi\rangle = \int \psi(x)|x\rangle\,dx$

.. měřitelná veličina $\hat{Q} \equiv \hat{x} = \int |x\rangle\langle x|\,dx$ ... spektr. rozklad $P_x = |x\rangle\langle x|$

tj $p_{\langle a,b\rangle} = \int_a^b \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle\,dx = \int_a^b |\psi|^2\,dx$

po měření ve stavu $|\psi'\rangle = \int_a^b P_x|\psi\rangle\,dx = \int_a^b \psi(x)|x\rangle\,dx$

tj $\psi'(x) = \chi_{\langle a,b\rangle}(x)\,\psi(x)$

pozn: $\rho(x) \equiv |\psi(x)|^2$ ... hustota pravd. výskytu částice v místě x

Další statistické veličiny

z matematického hlediska měření A ve stavu $|\psi\rangle$

→ náhodná proměnná: opakované měření dá pokaždé jinou hodnotu $a \in \sigma(A)$ s rozdělovací funkcí $p_\psi(a)$

střední hodnota náhod. prom: $\langle a\rangle \equiv \int a\, p_\psi(a)\, da = \int a \langle\psi|P_a|\psi\rangle da$

tj $\langle a\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$ (normované $|\psi\rangle$!)

vyšší momenty náhod. prom: $\langle a^n\rangle \equiv \int a^n p_\psi(a)\,da = \langle\psi|A^n|\psi\rangle$

obec. → fce náhod. prom. $\langle f(a)\rangle \equiv \int f(a)\, p_\psi(a)\, da = \langle\psi|f(A)|\psi\rangle$

důležitý případ <u>variance</u> (střední kvadr. odchylka, rozptyl):

značení σ_a^2 nebo $(\Delta a)^2 \equiv \langle (a-\langle a\rangle)^2\rangle = \langle a^2\rangle - \langle a\rangle^2$

pozn: ve vl. stavu: $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ ... $\left.\begin{array}{l}\langle A\rangle = a\\ \langle A^2\rangle = a^2\end{array}\right\} \to (\Delta A)^2 = 0$

Relace neurčitosti:

nechť $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$ potom $\boxed{\Delta a\cdot\Delta b \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle|}$

pozn: im. jednotka zaručuje: pokud $A=A^+$, $B=B^+ \Rightarrow C=C^+$

DK: Schwarz nerovnost: $\|\phi_1\|\cdot\|\phi_2\| \geq |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|$ (*)

pro $|\phi_1\rangle = (A-\langle a\rangle)|\psi\rangle$ ... $\|\phi_1\| = \sqrt{\langle\psi|(A-\langle a\rangle)^2|\psi\rangle} = \Delta a$

podob $|\phi_2\rangle = (B-\langle b\rangle)|\psi\rangle$ ... $\|\phi_2\| = \Delta b$

pravá str (*):

$$|\langle\phi_1|\phi_2\rangle| = |\langle\psi|(A-\langle a\rangle)(B-\langle b\rangle)|\psi\rangle| = |\langle\psi|AB - \langle a\rangle\langle b\rangle|\psi\rangle|$$

$$= |\langle\psi|\frac{AB-BA}{2} + \frac{AB+BA}{2} - \langle a\rangle\langle b\rangle|\psi\rangle|$$

$$= |\underbrace{\frac{i}{2}\langle\psi|C|\psi\rangle}_{\text{ryze imag}} + \underbrace{\langle\psi|\frac{AB+BA}{2}|\psi\rangle - \langle a\rangle\langle b\rangle}_{\text{reálné}}| \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|C|\psi\rangle| \quad \text{c.b.d.}$$

nejznámější příklad: $[x_1,p_1] = i\hbar$ → $\boxed{\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$

Kompatibilní pozorovatelné

Věta:
Pokud $[A,B]=0$ pak vl. prostory A jsou invariantní vůči B a naopak:

$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \Rightarrow A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$ kde $|\phi\rangle = B|\psi\rangle$

Věta: nechť A, B jsou samosdružené operátory.
Potom existuje úplná ~~sp~~ množina společných vl. v. $\Leftrightarrow [A,B]=0$

DK: ($\Rightarrow$) je triviální důsledek spektrálního rozkladu

Dělal jsem jinak – viz dodatek

($\Leftarrow$) konstruktivní dk ... sada vektorů $P_b|a_n\rangle$ $\forall b, a_n$
.. některé mohou být nulové, ale je úplná : $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n|a_n\rangle = \sum_{nb} \psi_n P_b|a_n\rangle$
.. jsou ~~[illegible]~~ vl. v. B ... b
.. jsou vl. v. A ... a) $(A-a_n)\hat{P}_b|a_n\rangle$ je také vl. v. B přísl. b ... ψ_{nb}

neboť $B(A-a_n)P_b|a_n\rangle = (A-a_n)BP_b|a_n\rangle = b\,(A-a_n)P_b|a_n\rangle$

b) : $(A-a_n)|a_n\rangle = \sum_b (A-a_n)P_b|a_n\rangle = 0 = \sum_b \psi_{nb}$
$\rightarrow$ jednotlivé členy sumy jsou OG (různé b) a tedy $\psi_{nb}=0\ \forall b,n$

pozn: důsl $[A,B]=0 \Leftrightarrow [P_a, P_b]=0\ \forall a,b$
DK: $\Leftarrow$ spektr. rozklad ; $\Rightarrow$ rozepíšu P_a, P_b pomocí spol. báze

pozn: některé $P_b|a_n\rangle$ mohli být nulové $\rightarrow$ množina $\forall |ba_n\rangle$
nemusí být kartézský součin ... později napíš. $|f_m\rangle$

+Rozšíření na více operátorů

úplný systém komutujících operátorů (ÚSKO)

$\hat{A}^{(1)}, \dots \hat{A}^{(N)}$ navzájem komutují $\Rightarrow \exists$ spol. báze vl. v. $\forall$ operátorů

ÚSKO ...def: ~~∀~~ sada vl. č. $\{a^{(1)}, \dots, a^{(N)}\}$ jednoznačně def. vl. v. $|\psi\rangle$
(až na fázi) ~~po~~ (každá přípustná) ... značení $|\psi\rangle = |a^{(1)} \dots a^{(N)}\rangle$

Věta: operátor $\hat{F}$ komutuje se $\forall A^{(1)}, \dots, A^{(N)}$ prvky ÚSKO
$\Rightarrow \hat{F} = f(A^{(1)}, \dots, A^{(N)})$

DK: $\hat{F}, A^{(1)}, \dots, A^{(N)}$ mají spol. sadu vl. v., ale to musí být $|a^{(1)} \dots a^{(N)}\rangle$
spektr. rozklad $\hat{F} \rightarrow \forall a^{(1)}, \dots a^{(N)}\ \exists$ jediné $f = f(a^{(1)}, \dots, a^{(N)})$

pozn: celou množinu $\hat{A}^{(1)}, \dots \hat{A}^{(N)}$ lze považovat za jeden oper.
s nedegenerovaným spektrem ... vl. č. vektor

PŘ: $Q_1, Q_2, Q_3 \longrightarrow$ spol. báze $|\vec{x}\rangle$

typický příklad:

$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$; $A^{(1)} \dots A^{(N)}$ ..ÚSKO NA $\mathcal{H}^{(A)}$

$B^{(1)} \dots B^{(M)}$ ...ÚSKO NA $\mathcal{H}^{(B)}$

potom $A^{(1)}\otimes I, \dots, A^{(N)}\otimes I, I\otimes B^{(1)}, \dots, I\otimes B^{(M)}$ je ÚSKO na $\mathcal{H}$

pozn: operátor $C = A + B$ ~. diagonalizovat ... $[A,B]=0$ $\longleftrightarrow$ najít spol. bázi
→ častý případ v QM

Různé ekvivalentní reprezentace QM

- volba ÚSKO ⟶ baze + vyjádření vln fce a oper. v bazi

– diskrétní případ: $I = \sum_n |n\rangle\langle n|$ ... stavy $|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{\psi_n}$ $\equiv |\psi\rangle$
(izomorfizm.) ztotožnění

operátory $A|\psi\rangle = \sum_{nn'} |n\rangle\underbrace{\langle n|A|n'\rangle\langle n'|\psi\rangle}_{A_{nn'}\psi_{n'}}$ ... $A \equiv A_{nn'}$

– spojitý případ: $I = \int |\nu\rangle\langle\nu|\, d\nu$ $\quad |\psi\rangle = \int d\nu\, \psi(\nu)|\nu\rangle$

$\langle\nu|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle$

$$A|\psi\rangle = \int d\nu\, d\nu'\, |\nu\rangle\underbrace{\langle\nu|A|\nu'\rangle}_{A_{\nu\nu'} \equiv A(\nu,\nu')}\langle\nu'|\psi\rangle$$ ... jádro integrálního operátoru

PŘ: $\hat{x} \longleftrightarrow x\,\delta(x-x')$ ... $\int dx'\, x\,\delta(x-x')\psi(x') = x\psi(x)$

$V(\hat{x})$ $\quad V(x)\delta(x-x')$ $\quad A|\psi\rangle$ ... $V(x)\psi(x)$

$\hat{p} \longleftrightarrow -i\hbar\,\delta'(x-x')$ $\quad -\int dx'\, i\hbar\,\delta'(x-x')\psi(x')\,dx' = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$

jiný zápis $-i\hbar\,\delta(x-x')\frac{d}{dx'}$

podrobněji $-i\hbar\,\delta'(x-x') \equiv -i\hbar\frac{d}{dx}\delta(x-x') = +i\hbar\frac{d}{dx'}\delta(x-x')$ + per partes

DODATEK:

Lemma 1: $[A,B]=0 \;\wedge\; B|\psi\rangle = b|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad B|\phi\rangle = b|\phi\rangle$; kde $|\phi\rangle = A|\psi\rangle$

DK: zjevné

Lemma 2: $[A,B]=0 \quad a_1 \neq a_2 \quad \Rightarrow \quad \langle a_1|B|a_2\rangle = 0$

DK: $0 = \langle a_1|[A,B]|a_2\rangle = \langle a_1|AB|a_2\rangle - \langle a_1|BA|a_2\rangle$

tj. $0 = (a_1 - a_2)\langle a_1|B|a_2\rangle \quad \Rightarrow$ c.b.d

Lemma 3a: $[A,B]=0 \quad \Rightarrow [P_a,B]=0$

DK: v bázi vl. v. A: $A|a,\alpha\rangle = a|a,\alpha\rangle \to P_a = \sum_\alpha |a\alpha\rangle\langle a\alpha|$

$$\langle a_1\alpha_1|[P_a,B]|a_2\alpha_2\rangle = \langle a_1\alpha_1|\sum_\alpha |a\alpha\rangle\langle a\alpha|B|a_2\alpha_2\rangle - \underbrace{\langle a_1\alpha_1|\cancel{\sum} B\sum_\alpha|a\alpha\rangle}_{\delta_{a_1a}\langle a|B|a\rangle}\underbrace{\langle a\alpha|a_2\alpha_2\rangle}_{\delta_{aa_2}\delta_{\alpha\alpha_2}}$$

padle lemm. 1,2:

$$= \delta_{aa_1}\delta_{aa_2}\cancel{\sum_\alpha}\left\{\langle a\alpha_1|B|a\alpha_2\rangle - \langle a\alpha_1|B|a\alpha_2\rangle\right\}$$

$$=0$$

Lemma 3: $[A,B]=0 \quad \Rightarrow \quad [P_a,P_b]=0 \quad \forall a,b$

DK: uplatnění Lemm. 3a na $[P_a,B]$

$\Rightarrow \exists$ společná báze ... projektory $P_aP_b = P_bP_a$