VII Unitární časový vývoj

časová Schrödingerova rovnice: $\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \quad (\text{tSR})}$

... odvodili jsme pro bezstrukt. částici, ale POSTULUJEM OBECNĚ

→ existence H pro ∀ systém

formální řešení: $|\psi(t-s)\rangle = J_s|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H\cdot s}|\psi(t)\rangle$

↑ čas. posun v Galilei transf.

obvyklejší zápis: $|\psi(t+s)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Hs}|\psi(t)\rangle \equiv U(s)|\psi(t)\rangle$

nebo $|\psi(t')\rangle = U(t',t)|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t'-t)H}|\psi(t)\rangle$

~~OPERÁ~~ EVOLUČNÍ OPERÁTOR

pozn: (tSR) lze zobecnit rovněž na interakci tj. H explicitně závislé na čase. Řešení (tSR) pak NELZE psát jako exp!

→ příští semestr... Dysonova řada jako zákl. poruch. počtu

.. nebo numericky jako difro v t ...

NAPŘ: vnější pole $A(Q)$, $V(Q)$ záv. na čase

→ $|\psi(t+\Delta t)\rangle \simeq |\psi(t)\rangle + \frac{H}{i\hbar}\Delta t|\psi(t)\rangle$

1, STAC. STAVY A INT. POHYBU

pro čas. nezáv. H: ... stacionární stavy $\boxed{H|E_n,\alpha\rangle = E_n|E_n,\alpha\rangle}$ (SR)

časový vývoj: $|E_n,\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|E_n,\alpha\rangle|_{t=0}$

Libovolné měření: (veličina $\hat{A}$)

$\langle A\rangle \equiv \langle E_n\alpha(t)|A|E_n\alpha(t)\rangle = \langle A\rangle_{t=0}$

$p_a = \langle E_n\alpha(t)|P_a|E_n\alpha(t)\rangle = p_a|_{t=0}$

NEZÁVISÍ NA ČASE

• Pozorovatelné ve stacionárních stavech nezávisí na čase

obecný stav: $|\psi\rangle = \sum c_{n\alpha}|E_n\alpha\rangle \to |\psi(t)\rangle = \sum e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}c_{n\alpha}|E_n\alpha\rangle$

obecně.. měření závisí na čase: ...př: $|\psi\rangle = e^{-i\omega_1 t}c_1|1\rangle + e^{-i\omega_2 t}c_2|2\rangle$

.. $\langle A\rangle_t = \underbrace{|c_1|^2\langle 1|A|1\rangle + |c_2|^2\langle 2|A|2\rangle}_{\text{nezáv. na čase}} + \underbrace{c_1^*c_2\langle 1|A|2\rangle e^{i(\omega_1-\omega_2)t} + c.c.}_{\text{interferenční člen}}$

integrály pohybu: $[H,A]=0$ ... tj ∀ vl. hodnoty a .. $[H,P_a]=0$

→ měření nezávisí na čase v libovolném stavu

$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}Ht}A\,e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle|_{t=0}$

podobně pro P_a → pravděpodobnost p_a nezáv. na čase

speciální případ ... H je integrálem pohybu

PŘ: pro sfér. sym. ~~případ je~~ potenciál
je L_z (orbitální mom. hybnosti) integrálem pohybu
→ částice připravená ve stavu $|lm\rangle$ v něm i zůstane
($p_{l=1, m=1} = 1$ nezáv. na čase)

<u>poznámka:</u> tvrzení lze obrátit: $\langle A \rangle_a$ nezávislé na čase $\forall a, \forall \psi$
$\Rightarrow [H, A] = 0$

<u>poznámka:</u> standardní symetrie: ~~trans~~

translační $\leftrightarrow [H, P] = 0$ .. zachování hybnosti
rotační $\leftrightarrow [H, L_z] = 0$ ... zach. mom. hybn.
časová $\leftrightarrow [H(t_1), H(t_2)] = 0$ ... zach. energie

2) Rovnice kontinuity pro pravděpodobnost výskytu

• pravděpodobnost výskytu částice v místě x: $p_x = \langle \psi | x \rangle\langle x | \psi \rangle$
↳ spoj. spektrum .. pravd. hustota $\equiv \rho(x) = |\psi(x)|^2$
... nalezení částice v intervalu $\int \rho(x)\,dx$ ... spec. $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1 \equiv \langle \psi | \psi \rangle$

• Během unitárního vývoje se $\langle \psi | \psi \rangle$ zachovává
→ rovnice kontinuity: $\partial_t \rho(x) + \operatorname{div} \vec{j}(x,t) = 0$
... dá se definovat hustota toku pravděpodobnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^*(x)\psi(x) = \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial t}\psi(x) - \psi(x) \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x) \qquad \text{+ použití SR}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left[\psi^* \Delta\psi - \psi \Delta \psi^*\right] = \nabla \cdot \left(\frac{\hbar i}{2m}\left[\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right]\right)$$

.. srovn. s rovn. kont. $\Rightarrow \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right] = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \psi^* \nabla \psi$

• <u>pozn:</u> srovn. ..operátor rychlosti $\hat{V} = \frac{\vec{P}}{m} = -\frac{i\hbar}{m}\nabla$
..tj $\vec{j} = \operatorname{Re} \psi^* \hat{V} \psi$ ... pro $\psi \in \mathcal{H}$: $\langle \psi | \hat{V} | \psi \rangle = \int \vec{j}\, d^3x$
tj L^2 funkce

• <u>pozn:</u> pokud $\psi(x,t) = R(x,t)\, e^{\frac{i}{\hbar} S(x,t)} \rightarrow \vec{j} = R^2 \frac{1}{m}\vec{\nabla} S = \rho \cdot \frac{\vec{\nabla} S}{m}$

- pro reál fci ψ ... $\vec{j} = 0$
- pro stac. stavy $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = 0$
- pro rovin. vlnu $\psi = N e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \rightarrow \vec{j} = |N|^2 \cdot \frac{\vec{p}}{m}$
- pro součet. rov. vln v 1D $\psi = A_+ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} + A_- e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \rightarrow \vec{j} = \frac{\vec{p}}{m}\{|A_+|^2 - |A_-|^2\}$

ale obecně ne aditivní

3) Evoluční operátor v souřadnicové repr.: QM-T-3

(zpět k H nezáv. na čase; navíc volná částice)

- Budeme se zabývat vývojem vlnového balíku pro volnou částici
- Hodí se zvlášť rozlišit případ kdy děláme evoluci do budoucna: ($t_2 > t_1$)

$$|\psi(t_2)\rangle = G^{(+)}(t_2,t_1)|\psi(t_1)\rangle \equiv \theta(t_2-t_1)\,U(t_2,t_1)|\psi(t_1)\rangle$$

- důvod ... $G^{(+)}$ má lepší Fourier. transf. než U — Retardovaný G-operátor
- $G^{(+)}$ je Greenovým operátorem (SR+) pro pravou stranu:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t_2} - H\right)\hat G^{(+)}(t_2,t_1) = i\hbar\,\delta(t_2-t_1)$$

(pozn.. někdy se $i\hbar$ zahrnuje do def. $G^{(+)}$)

(později rozdělíme $H = H_0 + V$ a $H_0 \to G_0$; V na pravou stranu)

- podobně se def. $\hat G^{(-)}(t_2,t_1) = -\theta(t_1-t_2)\,\hat U(t_2,t_1)$ .. ADVANCOVANÝ G-operátor

→ stejná rovnice .. jiná okraj. podm.: $G^{(-)} = 0$ pro $t_1 < t_2$

vyjádření v souřadnicové reprezentaci:

$$\langle x_2|\psi(t_2)\rangle = \langle x_2|G^{(+)}(t_2,t_1)\int dx_1\,|x_1\rangle\langle x_1|\psi(t_1)\rangle$$

tj.
$$\psi(x_2,t_2) = \int dx_1\, G^{(+)}(x_2,t_2,x_1,t_1)\,\psi(x_1,t_1) \qquad (*)$$

↳ propagátor

pozn: lze chápat jako G-funkci pro počát. podmínku, tj:
časový vývoj $\psi(x_2,t_2) = G(x_2,t_2,x_1,t_1)$ pro vlnovou funkci
s počát. podm. δ-funkce $\psi(x,t)\big|_{t=t_1} = \delta(x-x_1)$

(*) je důsledkem linearity (ČSR)

Propagátor volné částice:

$$G_0^{(+)}(\vec x_2,t_2,\vec x_1,t_1) \equiv \theta(t_2-t_1)\langle\vec x_2|e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}(t_2-t_1)}|\vec x_1\rangle$$

$I = \int|\vec p\rangle\langle\vec p|\,d^3p$

$$= \theta(t_2-t_1)\int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\vec p\cdot\underbrace{(\vec x_2-\vec x_1)}_{\vec x} - \frac{\vec p^{\,2}}{2m}\underbrace{(t_2-t_1)}_{t}\right]\right\}$$

.. součin 3 integrálů: $\int\frac{dp_x}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}[p_x\cdot x - \frac{p_x^2}{2m}t]}$ ... osciluje pro $p\to\infty$

.. konverguje $\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\cdots\big|_{t\to t-i\varepsilon}$

$$p^2\frac{t}{2m} - px = \frac{t}{2m}\left(p - \frac{x}{2}\cdot\frac{2m}{t}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\cdot\frac{2m}{t}$$

$$= \int\frac{dp_x}{2\pi\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{t}{2m}(p-\frac{xm}{t})^2}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{mx^2}{2t}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{t}{2m}}}\;e^{\frac{i}{\hbar}\frac{mx^2}{2t}}$$

$$\to \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}$$

3) Evoluční operátor pro $H(t)$ — až nakonec kapitoly

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

(SRt) $\longrightarrow$ $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0)$ … s poč. podm. $U(t_0,t_0)=I$

integrací: $U(t,t_0) = I + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t_1)U(t_1,t_0)\,dt_1 = \mathcal{F}[U]$

iterování $U^{(0)} = I$: $U^{(n+1)} = \mathcal{F}[U^{(n)}]$

$$\rightarrow\ U(t,t_0) = I + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t_1)\,dt_1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} H(t_1)H(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \dots$$

(*) Dysonova řada $\quad + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\dots\int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)\,dt_n\dots dt_2\,dt_1 + \dots$

- dá se konstruovat $\{H(t)$: $[H(t_1),H(t_2)]=0$ … ne moc častý případ

potom $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1} H(t_1)H(t_2)\,dt_2\,dt_1 =$  $= \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} H(t_1)H(t_2)\,dt_1\,dt_2\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right]^2$$

podob. $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_1}\dots\int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1)\dots H(t_n)\,dt_n\dots dt_1 = \frac{1}{n!}\left[\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right]^n$

$$\rightarrow\ U(t,t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right\}$$

- obecně: zavedeme čas. uspořádání $T(H(t_i)H(t_j)) = H(t_<)H(t_>)$

$t_< \equiv \min(t_1,t_2)\quad t_> = \max(t_1,t_2)$

potom $T([H(t_1),H(t_2)]) = 0$, a tedy

$$\int_{t_0}^{t}\dots\int_{t_0}^{t_{n-1}} H(t_1)\dots H(t_n)\,dt_n\dots dt_1 = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\dots\int_{t_0}^{t}dt_n\, T(H(t_1)\dots H(t_n))$$
$$= \frac{1}{n!}T\left(\left[\int_{t_0}^{t}dt'\,H(t')\right]^n\right)$$

$$\rightarrow\ U(t,t_0) = T\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right\}$$

.. vypadá zběsile, ale s úspěchem se používá

$\rightarrow$ výhodné pro poruch. rozvoje v mocninách operátorů pozn: dimenze jinde se neprojeví

tj.

$$G_0^{(+)}(\vec{x}_2, t_2, \vec{x}_1, t_1) = \theta(t_2-t_1)\left(\frac{m}{2\pi\hbar i(t_2-t_1)}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\frac{(\vec{x}_2-\vec{x}_1)^2}{(t_1-t_2)}\right\}$$

QM - T - 4

4) časový vývoj gaussovského balíku pro vol. částici

Gauss. balík $|\psi\rangle$:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta p)^2}} e^{-\left(\frac{p-p_0}{2\Delta p}\right)^2} e^{-\frac{i}{\hbar}px_0} \underset{\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}}{\overset{\int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}}{\rightleftarrows}} \psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\left(\frac{x-x_0}{2\Delta x}\right)^2} e^{+\frac{i}{\hbar}p_0 x}$$

kde: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ $\quad \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = p_0$ $\quad \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = x_0$

$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}}$ $\quad \langle\psi|(\hat{p}-p_0)^2|\psi\rangle = (\Delta p)^2$ $\quad \langle\psi|(\hat{x}-x_0)^2|\psi\rangle = (\Delta x)^2$

časový vývoj: $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle$

(1). buď pomocí G_0^+: $\langle x|\psi(t)\rangle \equiv \psi(x,t) = \int d^3x' \, G_0^{(+)}(\vec{x}, t, x', 0)\, \psi(x')$

(2). nebo p-reprez.: $\psi(p,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}\psi(p)$ + F.T. do x-repr.

každopádně vede na úpravu na čtverec + Gauss integrál

AD (2): uděláme pro $x_0 = 0$; def $\boxed{\mu = \frac{p}{2\Delta p}}$ $\boxed{\mu_0 = \frac{p_0}{2\Delta p}}$ .. tj $\left(\frac{p-p_0}{2\Delta p}\right)^2 = (\mu-\mu_0)^2$

dále • $e^{\frac{i}{\hbar}px} = e^{2i\frac{2}{\hbar}\Delta p \cdot \frac{p}{2\Delta p}\cdot\frac{x}{2}} = \exp\{2i\mu\xi\}$ ... $\boxed{\xi \equiv \frac{x}{2\Delta x}}$

$\frac{2}{\hbar}\Delta p$ ... $1/\Delta x$

• $-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t = -i\left(\frac{2}{\hbar}\Delta p\right)\left(\frac{p}{2\Delta p}\right)^2 \cdot \frac{\Delta p}{m}\cdot t = -i\mu^2 \boxed{\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot t} \equiv -i\mu^2 \cdot \alpha$

$\frac{2}{\hbar}\Delta p$ ... $1/\Delta x$

nyní: $\psi(x,t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}\psi(p,t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta p)^2}} \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-(\mu-\mu_0)^2 - i\alpha\mu^2 + 2i\mu\xi}$

úprava na čtverec: $-[\mu^2(1+i\alpha) - 2\mu(\mu_0 + i\xi) + \mu_0^2] = -a(\mu-q)^2 + b$

kde: $a = (1+i\alpha)$

$q = (\mu_0 + i\xi)/a$

$b = aq^2 - \mu_0^2$

+ záměna $\int dp = 2\Delta p \int d\mu$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \underbrace{\frac{2\Delta p}{\sqrt{2\pi\hbar\Delta p}}}_{1/\sqrt{\Delta x}} \underbrace{\int \frac{d\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-a(\mu-q)^2}}_{\to 1/\sqrt{a}} \cdot \exp\Big\{\underbrace{\frac{(\mu_0+i\xi)^2}{1+i\alpha} - \mu_0^2}_{\text{extrakce abs. hodnoty a fáze}}\Big\}$$

$$b = -\frac{(\xi - i\mu_0)^2}{1+\alpha^2}(1-i\alpha) - \mu_0^2\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2} = -\frac{1}{1+\alpha^2}\left\{\xi^2 - 2\mu_0\xi\alpha + \mu_0^2\alpha^2 - i(2\xi\mu_0 + \alpha\xi^2 - \alpha\mu_0^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi(\Delta x)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+i\alpha}} \exp\left\{-\frac{(\xi-\mu_0\alpha)^2}{1+\alpha^2}\right\} \exp\left\{i\frac{\alpha(\xi^2-\mu_0^2) + 2\xi\mu_0}{1+\alpha^2}\right\}$$

interpretace:

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\Delta x\sqrt{1+\alpha^2}}\,\exp\left\{-\frac{(x-p_0\alpha)^2}{1+\alpha^2}\right\}$$

kde: $x - p_0\alpha = \frac{x}{2\Delta x} - \frac{p_0}{2\Delta p}\cdot\frac{\Delta p}{m}\cdot\frac{t}{\Delta x} = \frac{x - v_0 t}{2\Delta x}$ ... pohyb vln. balíku

$\Delta x^2(1+\alpha^2) = \Delta x^2 + \Delta v^2 t^2 = \sigma(t)^2$ ... rozplývání bal.

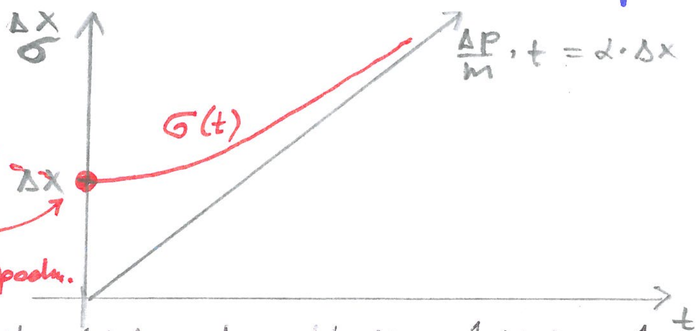
tj $|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma(t)}\,\exp\left\{-\left(\frac{x-v_0 t}{2\sigma(t)}\right)^2\right\}$ semi-klas. interpretace

pozn: v 3D ... prostě součin tří takových faktorů

pozn: odvození lze provést pro $p_0 = 0$ + udělat Galilei transf.

→ faktor $(x - v_0 t)$

Rozplývání vlnového balíku:



minimální vln balík, který jsme zvolili jako poč. podm.

pozn: Gauss balíky = hustá množina v L^2; Pravd. výskytu v kon. oblasti $\sim \frac{1}{t}$ (1D) a $\frac{1}{t^3}$ (3D) (díky rozplývání)

5) Časový vývoj ~~ve~~ v Heisenbergově obraze

doposud: Schrödingerův obraz:

$|\psi_S\rangle \equiv |\psi_S(t)\rangle = U(t)|\psi_S(0)\rangle$ (obecně $|\psi(t)\rangle = U(t-t_0)|\psi(t_0)\rangle$ ZÚNO $t_0 = 0$)

fyzikální předpovědi:

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi_S(t)|A|\psi_S(t)\rangle = \langle\psi_S(0)|\underbrace{U^+(t)A\,U(t)}_{A_H(t)}|\psi_S(0)\rangle$$

... podobně $p_a(t) = \langle\psi_S(t)|P_a|\psi_S(t)\rangle = \langle\psi_S(0)|P_a^{(H)}(t)|\psi_S(0)\rangle$

→ Heisenbergův obraz: ... ztotožníme s $|\psi_S\rangle = |\psi_H\rangle$ v referenčním čase $t = 0$

stav. vektory čas nezávislé: $|\psi_H\rangle = |\psi_S(0)\rangle$

měřitelné veličiny záv. na t: $A_H(t) = U^+(t)A\,U(t)$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\{U^+(t)A\,U(t)\} = \frac{1}{i\hbar}\{U^+AHU - HU^+AU\} = \frac{1}{i\hbar}U^+[A,H]U$$

$i\hbar\frac{d}{dt}U = HU$

$$\to\quad \frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A_H(t), H]\left(+\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

(samozřejmě $H_H = H$ nezáv. na čase)

Heisenbergova pohyb. rovnice

příklad potenc. záv. na t: $V(\hat{x}, t)$

PŘ: Lineární harmonický oscilátor v Heisenberg. repr.

$$\dot{x}_H = \frac{1}{i\hbar}[x_H, H] = \frac{p_H}{m}$$
$$\dot{p}_H = \frac{1}{i\hbar}[p_H, H] = -m\omega^2 x_H = -k x_H$$

} jako klas. rovnice, ale pro operátory

důsl: $\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{m}\langle p\rangle$, $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -k\langle x\rangle$ } střední hodnoty splňují stejné rce jako klas, bez ohledu na stav (může být silně neklasický)

ale pozor: x, p nejsou nutně pozorovatelné

koherentní (kvaziklasické) stavy LHO:

cíl: – najít kvantový stav $|\psi\rangle$ LHO, který se v limitě $E \gg \hbar\omega$ bude podobat klasické částici.
– vedlejší produkt: najdeme vývoj Gauss. balíku pro LHO

vidíme, že $\langle x\rangle$ a $\langle p\rangle$ automaticky klas. pohyb.

→ další požadavky: $\Delta x, \Delta p$ malé a $E = H_{klas}(\langle x\rangle, \langle p\rangle)$; ΔE malé

→ vyjde: důležitá jsou vl. st. $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2}$

v klasické fyzice: $a = a_0 e^{-i\omega t}$ .... může zkusit, že Heisenberg rovnice $\hookrightarrow \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + i p_0)$ ⟹ $\hat{a}_H = \hat{a}_S \cdot e^{-i\omega t}$

vyjdeme z:
• požadavek: $\langle E\rangle \equiv \langle \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})\rangle = \hbar\omega\langle a^+ a\rangle + \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \cdot |a_0|^2 = \frac{\hbar\omega}{2}(p^2 + q^2)$

zanedb. pro $E \gg \hbar\omega$

tj současně: (1) $\langle a\rangle = a_e \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q_e + i p_e)$
$E \gg \hbar\omega$ (2) $\langle a^+ a\rangle = |a_0|^2$

⟹ platí jen ve stavu $a|\psi\rangle = a_0|\psi\rangle \overset{def}{\equiv} \alpha|\psi\rangle$
→ def: koherentní stav

pozn: základní stav $|0\rangle$ je koh. stavem pro $\alpha = 0$, ale semiklasický jen pro $\alpha \gg 1$

DK: def $|v\rangle = a|\psi\rangle - a_0|\psi\rangle$

pak $0 \le \langle v|v\rangle = \underbrace{\langle\psi|a^+ a|\psi\rangle}_{|a_0|^2} - a_0^*\underbrace{\langle\psi|a|\psi\rangle}_{=a_0} - a_0\underbrace{\langle\psi|a^+|\psi\rangle}_{=a_0^*} + |a_0|^2\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}$

tj $0 = \langle v|v\rangle$
ale rovnost v plati jen pro $|v\rangle = 0$ (def. skalár. souč v LVP)

dále budeme vyšetřovat vlastnosti koh. st. a ukážeme, že splňuje i podmínky kladené na klas. lim pro $\alpha \gg 1$

~~• $\Delta x, \Delta p$ je malé~~ • vyjádření $|\psi\rangle \equiv |\alpha\rangle$ ve stac. stavech pro LHO

$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ ⟶ $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ⟹ $c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n$

tj $|\alpha\rangle = N\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ + normování $\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{|\alpha|^2}$
⟹ $N = e^{-|\alpha|^2/2}$

• **pozn:** $(AB)_H = A_H B_H$

$$(f(A))_H = f(A_H) \qquad A = \sum_a P_a \cdot a \;\rightarrow\; A_H = \sum_a a\, P_a^{(H)}$$

PŘ: částice v potenc. poli $V(\hat{x})$ ... $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

Heisenbergovy pohyb. rovnice:

$$\dot{x}_H = \frac{1}{i\hbar}[x_H, H] = \left([x,p] = i\hbar\,;\; [x, f(p)] = i\hbar f'(p) \right) = \frac{p_H}{m}$$

~~[illegible]~~:

$$\dot{p}_H = \frac{1}{i\hbar}[p_H, H] = -\left[\frac{dV(x)}{dx}\right]_H$$

⇒ Ehrenfestův teorém: $m \frac{d}{dt}\langle x \rangle = \langle p \rangle$

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

.. od klasických pohyb. rovnic se liší $\quad \frac{\partial}{\partial x} V \big|_{x = \langle x \rangle} \equiv V'(\langle x \rangle)$

... tj OK pro – dobře lokalizovanou částici

– hladké $V(x)$ ← V se málo mění na vzdál. srovn. s Δx

PŘ: volný Gauss. balík .. viz. str 4-5

$$\dot{x}_H = \frac{1}{i\hbar}[x_H, H] = \frac{p_H}{m} \;\longrightarrow\; x_H = x + \frac{p}{m}t$$

$$\dot{p}_H = 0 \qquad \longrightarrow\; p_H = p_S = p$$

čas. vývoj. středních hodnot (bez ohledu na tvar ψ !)

$$\langle x \rangle_t = \langle x_H \rangle_0 = \langle x \rangle_0 + \frac{\langle p \rangle_0}{m} t$$

$$\Delta x^2(t) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_t = \langle x_H^2 \rangle_0 - \langle x_H \rangle_0^2$$

$$= \Delta x^2(t=0) + \frac{\Delta p(t=0)^2}{m^2} t^2 + \underbrace{\frac{1}{m}\left(\langle xp + px \rangle_0 - 2\langle x \rangle_0 \langle p \rangle_0 \right) t}_{\text{obecně může způsobit dočas. zužování balíku (= 0 pro Gausse)}}$$

obecně

kladné a pro $t \to \infty$ rostoucí [illegible]

Dk: $\langle xp + px \rangle$ je 0 dokud je $\psi(x)$ nebo $\psi(p)$ reálné

např. $\psi(x)$ ... $\langle xp \rangle = \langle \phi_x | \phi_p \rangle = i$ reál. číslo $= -i\hbar \int \psi(x) \cdot x\, \psi'(x)$

$|\phi_x\rangle \equiv x|\psi\rangle \qquad \langle px \rangle = \langle \phi_p | \phi_x \rangle = -i$ stejné číslo $= (\langle \phi_x | \phi_p \rangle)^*$

$|\phi_p\rangle \equiv p|\psi\rangle \qquad$ pokud je $p_0 \neq 0$ i $x_0 \neq 0$ pak $\psi(x)$ i $\psi(p)$ jsou komplexní

ale $\langle xp + px \rangle$ bude 0 a $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\cdots}} e^{-\frac{(x)^2}{(2\Delta x)}} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}$

→ záměna $x \to x - x_0 \qquad \langle (x - x_0)p + p(x - x_0) \rangle = 0 = \langle xp + px \rangle - 2x_0 p_0$

QM-T-8

Měření energie: $p_n = |c_n|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$ → Poissonovo rozdělení

maximum? $p_n = \frac{|\alpha|^2}{n} p_{n-1}$ → max pro $|\alpha|^2 \simeq n$

$\langle E\rangle \equiv \langle H\rangle = \sum p_n E_n =$ (dá se spočíst analyt.) $= \hbar\omega(\langle a^+a\rangle + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(|\alpha|^2 + \frac{1}{2})$

↳ $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ ale víme

rozptyl ΔE? (variance) $\langle H^2\rangle = \hbar^2\omega^2 \langle\alpha|(a^+a + \frac{1}{2})^2|\alpha\rangle = \hbar^2\omega^2\langle\alpha|(a^+\underbrace{aa^+}_{=a^+a+[a,a^+]}a + a^+a + \frac{1}{4})|\alpha\rangle$

$= \hbar^2\omega^2(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + \frac{1}{4})$

→ $\Delta E^2 = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 = \hbar^2\omega^2|\alpha|^2$ → $\frac{\Delta E}{\langle E\rangle} \simeq \frac{1}{|\alpha|} \ll 1$ v lim $n\to\infty$

hodnoty $\Delta x, \Delta p$? ... analogicky $\langle x\rangle = x_0\sqrt{2}\cdot \mathrm{Re}\,\alpha = x_c$ ... klasické

$\langle p\rangle = p_0\sqrt{2}\cdot \mathrm{Im}\,\alpha = p_c$

... $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ $p_0 = \frac{\hbar}{x_0}$

$$\left.\begin{aligned}\langle x^2\rangle_\alpha &= \frac{x_0}{2}[(\alpha+\alpha^*)^2+1]\\ \langle p^2\rangle_\alpha &= \frac{p_0}{2}[1-(\alpha-\alpha^*)^2]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\Delta x &= \frac{x_0}{\sqrt{2}}\\ \Delta p &= \frac{p_0}{\sqrt{2}}\end{aligned} \Rightarrow \boxed{\Delta x\cdot\Delta p = \frac{\hbar}{2}}$$

... minimalizuje neurč.!

zápis $|\alpha\rangle$ v x-reprezentaci:

platí: $\psi_\alpha(x) = e^{i\theta_\alpha}\sqrt[4]{\frac{1}{2\pi(\Delta x)^2}}\cdot \exp\left\{-\left(\frac{x-\langle x\rangle}{2\Delta x}\right)^2 + \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x\right\}$

.. tj minimalizující Gauss balík

DK: 1) všimněte si, že sáhl stav $\langle x|0\rangle = \phi_0(\frac{x}{x_0})\frac{1}{\sqrt{x_0}}$ $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{1}{2}q^2}$

splňuje ↑ s $\Delta x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$ a $\langle x\rangle = 0$

2) Najdeme unit operátor $D(\alpha): |0\rangle \to |\alpha\rangle$

$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^+}|0\rangle$

.. není unit, ale $D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a} = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^+}e^{-\alpha^* a}$

je unitární, a $e^{-\alpha^* a}|0\rangle = |0\rangle$ ↳ užití $e^A e^B = e^{A+B}\cdot e^{\frac{1}{2}[A,B]}$

tj $\psi_\alpha(x) = \langle x|D(\alpha)|0\rangle =$

$D(\alpha) = \exp\left\{\frac{\alpha-\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{q} - i\frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{p}\right\} = \exp\{ip_c\hat{q} - iq_c\hat{p}\} = e^{ip_c\hat{q}}e^{-iq_c\hat{p}}e^{\frac{\alpha^{*2}-\alpha^2}{4}}$

$\frac{\alpha-\alpha^*}{\sqrt{2}} = ip_c$, $\frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}} = q_c$; $e^{-\frac{1}{2}[\hat{q},\hat{p}]p_cq_c} = e^{-\frac{i}{2}p_cq_c} = e^{i\theta_\alpha}$

tj $\psi_\alpha(x) = \langle x|e^{ip_c\hat{q}}e^{-iq_c\hat{p}}|0\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle\cdot x}\langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}\langle x\rangle\hat{P}}|0\rangle$

$\hat{q} = \frac{\hat{x}}{x_0} = \frac{p_0}{\hbar}\hat{x}$ ↳ posunutí o $\langle x\rangle$

↳ $\langle x|0\rangle|_{x = x-\langle x\rangle}$

⇒ c.b.d. pozn: dá se alternativně DK z vyjádření $|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ v x-repr. pomocí Hermite + rozpoznání vytv. fce H_n

časový vývoj?

platí $|\alpha(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum_n \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \cdot e^{-|\alpha|^2/2}$

tj. $|\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle$

$\Rightarrow$ zůstává koher. stavem s α měnícím se podle klas. fyziky

$\Rightarrow$ Gaussův balík zůstává jen se posouvá $\langle x\rangle, \langle p\rangle$ .. jako klas. fyz.
navíc zůstává $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ a $\langle E\rangle$ se samozřejmě zachovává