VIII – Teorie rozptylu

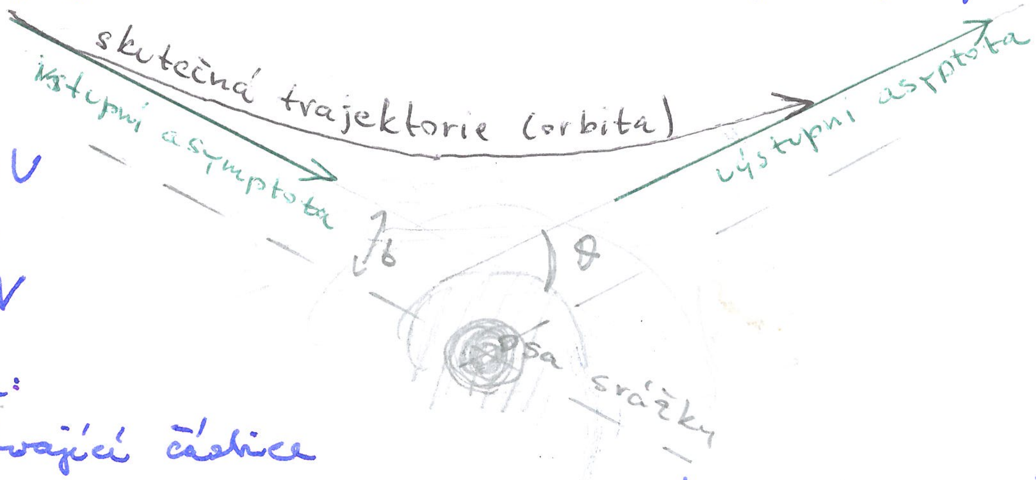
- popis srážek částic mezi sebou nebo na vnější poruše
- klíčová idea: v $t \to \pm\infty$ volná částice

  rozdělení interakce na $H = H_0 + V$ ... V nemá vliv v $t \to \pm\infty$

ukážeme si na:

1) Stručné shrnutí klasické teorie rozptylu

(na příkladu rozptylu bodové částice na vnějším pol.)



hamiltonián $H = H_0 + V$

- volná částice H_0
- interakce (porucha) V
- vstupní asymptota:

  ≡ trajektorie nalétávající částice

  daná Hamilt. pohyb. rovnicemi pro $H_0(q,p)$ $\longrightarrow$ $\phi_{in}(t) \equiv (q_i(t), p_i(t))$
- výstupní asymptota:

  .. trajektorie vylétávající částice: $\phi_{out}(t) \equiv (q_{out}(t), p_{out}(t))$
- vztah mezi nimi:

  dán skutečnou trajektorií pohybu $\phi(t) \equiv (q(t), p(t))$, která splňuje pohyb. rovnice s plným $H(q,p)$:

  $$\|\phi(t) - \phi_{in}(t)\| \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \qquad \|\phi(t) - \phi_{out}(t)\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$
- základní úloha rozptylu:

  najít vztah $S: \phi_{in} \to \phi_{out}$ (v QM rozptylový operátor S)

v klasické fyzice: ϕ_{in} jednoznačně charakterizováno pomocí počáteční hybnosti $\vec{p}_{in}$ a záměrného vektoru $\vec{b} \perp \vec{p}_{in}$

(jednoznačně souvisí s momentem hybnosti $\vec{l}$)

neznámé $\vec{p}_{out}, \vec{b}_{out}$; ale zákony zachování: $|p_{in}| = |p_{out}|$ (Energie)

(pro sfér. sym. V) $\qquad |b_{in}| = |b_{out}|$ (moment hybn.)

navíc ~~dráha~~ trajektorie zůstává v rovině $\vec{p}, \vec{b}$ $\to$ ϕ_{out} jednozn. dáno úhlem θ. Tj. pro sfér. sym V je zobrazení S jednozn. dáno funkcí $\theta(E,b)$

• **klasický diferenciální účinný průřez:**

def: účinný průřez je efektivní plocha do níž se musíme trefit, aby došlo ke sledovanému procesu.

PŘ: tvrdá kulička natřená lepidlem a nabitá:

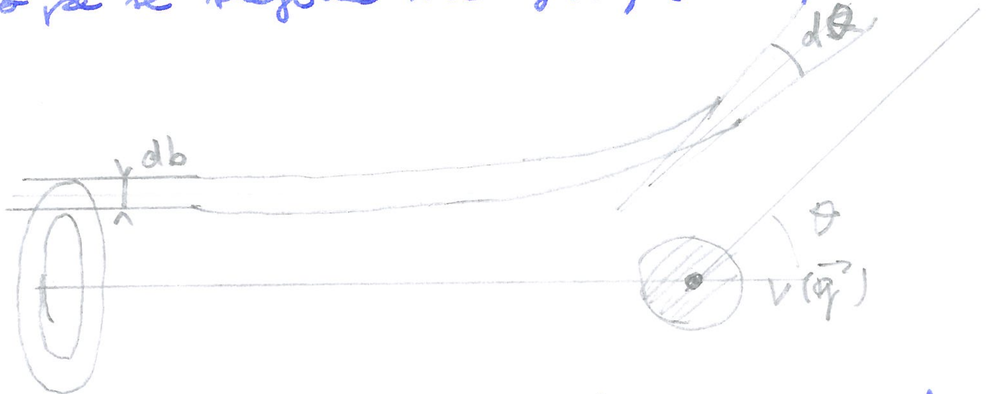
... spočítáme trajektorie v závislosti na $\vec{b} \perp \vec{p}_{in}$ ... fixní

plocha $\forall \vec{b}$, které vedou na přilepení $= \sigma_L$

možné zobecnění .. lepidlo není dokonalé v závislosti na geometrii průletu je přilepí s určitou pravděpodobností $p_L(b)$

$\rightarrow$ $\sigma_L = \int p_L(b)\, 2\pi b\, db$ (... odtud efektivní plocha, účinný průř

Podobně diferenciální účinný průřez ... sledovaným procesem je to, že se trefíme na výstupu do prostor. úhlu $d\Omega$:



plocha mezikroužku je úměrná velikosti prostor. úhlu:

konstanta úměrnosti: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b\, db}{2\pi \sin\theta \cdot d\theta} = \frac{b}{|\sin\theta|\,|\theta'(b)|}$ $\left(\text{přesněji } \sum_n \frac{b_n(\theta)}{|\sin\theta \cdot \theta_n'|} \right)$

pro nesfér. případ by to bylo $d\varphi$ a $b = b(\theta, \varphi)$

více kořenů $\theta(b_n) = \vartheta$

poznámka: • duha $\theta'(b) = 0$
• dopředné a zpětné zesílení $\theta = 0$ (gegenschein)

poznámka: • dimenzionalita: 2D ... σ má rozměr délky
1D ... σ bezrozměrné .. jen dva směry
$\rightarrow$ pravd. odrazu a průchodu

• dvě částice: převede se na pohyb těž. + relativní 3D rozptyl

2) Časový obrázek rozptylu v QM

obecně: $H = H_0 + V$;

kde obvykle H_0 .. volná částice (nebo několik neinterag. č.)

V ... interakce {budeme uvažovat rozumné fce → hladké, koneč. dosahu}

trajektorie systému .. unit. evoluce

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{U(t,t_0)}_{e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}|\psi(t_0)\rangle \overset{\text{běžně}}{=} \underbrace{U(t)}_{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}|\psi_0\rangle \qquad t_0=0$$

asymptoty ... volná částice

$$|\phi_{in}(t)\rangle = U_0(t)|\phi_{in}(0)\rangle, \quad \text{kde} \quad \|\phi_{in}-\psi\| \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$$

$$|\phi_{out}(t)\rangle = U_0(t)|\phi_{out}(0)\rangle, \quad \|\phi_{out}-\psi\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Základní úloha teorie rozptylu:

najít zobrazení $|\phi_{in}\rangle_t \to |\phi_{out}\rangle_t$ ... je nepraktické pracovat s celou trajektorií ... trajektorie reprez. stavem v $t=0$:

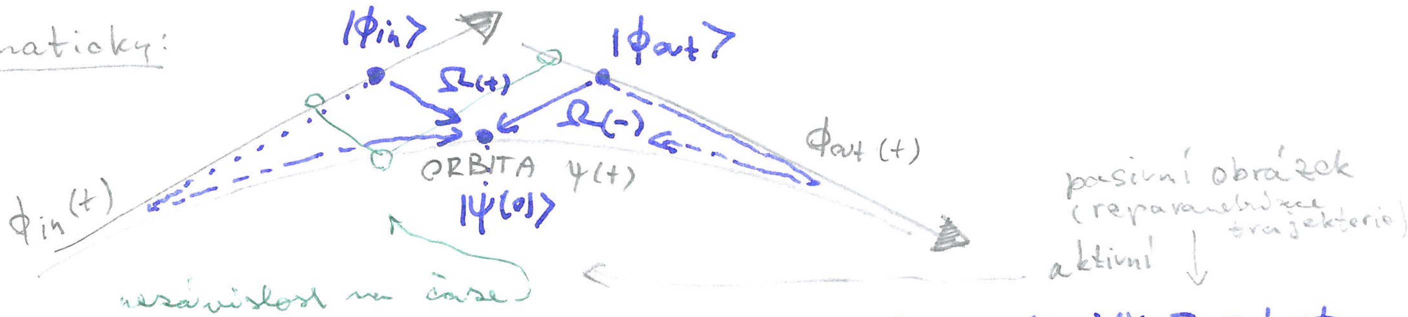
Rozptylový operátor (S-matice, scattering operator)

$$|\phi_{out}\rangle = S|\phi_{in}\rangle$$

.. formálně: $$S = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t'\to-\infty}} U_0^+(t)U(t)U^+(t')U_0(t') = \Omega_{(-)}^+\Omega_{(+)},$$

kde Møllerovy operátory: $$\Omega_{(\pm)} = \lim_{t\to\mp\infty} U^+(t)U_0(t)$$

Schematicky:



pozn: $\Omega_{(\pm)}$ nezávisí na volbě t_0 ... subst. v limitě $\tau = t - t_0$

→ odpovídá představě, že S zobrazuje in asympt. → out asymp.

pozn: dá se DK, že pro rozumné V: $\Omega_{(\pm)}|\phi\rangle$ konverguje $\forall \phi \in \mathcal{H}$

- $\Omega_{(\pm)}|\phi\rangle \perp$ vázané stavy
- $\Omega_{(\pm)}$ jsou izometrické
- S je unitární operátor $\mathcal{H}$ na $\mathcal{H}$

zákon zachování energie podél trajektorie:

víme, že $U = \text{fce } H$ .. pro t-nezáv. H: $[U, H] = 0$ tj. výsledky měření energie nezáv. na čase.

S-operátor obsahuje U a U_0 ... obecně $[H, H_0] \neq 0$?

• platí: $H\Omega(\pm) = \Omega(\pm) H_0 \quad (*)$

DK: $$e^{iHt}\Omega_{(+)} = e^{iHt} \lim_{\tau \to -\infty} e^{iH\tau} e^{-iH_0\tau} = \lim_{\tau \to -\infty} e^{i H \underbrace{(t+\tau)}_{T}} e^{-iH_0 \underbrace{(\tau + t}_{T} - t)}$$

$$= \left[\lim_{T \to -\infty} e^{iHT} e^{-iH_0 T}\right] \cdot e^{iH_0 t} = \Omega_{(+)} e^{iH_0 t}$$

derivací → $H\Omega_{(+)} = \Omega_{(+)} H_0$ ... stejně $\Omega_{(-)}$

$$\Rightarrow \quad S H_0 = \Omega_{(-)}^{+} \Omega_{(+)} H_0 = \Omega_{(-)}^{+} H \Omega_{(+)} = (H\Omega_{(-)})^{+} \Omega_{(+)} = (\Omega_{(-)} H_0)^{+} \Omega_{(+)} =$$

$$= H_0 \Omega_{(-)}^{+} \Omega_{(+)} = H_0 S \quad \to \quad \text{tj. } \boxed{[H_0, S] = 0}$$

.. energie se zachovává, ale měříme ji pomocí H_0 ne H!

• další důsledek relace (*):

pokud $H_0 |\phi_{in}\rangle = E |\phi_{in}\rangle \Rightarrow H \Omega_{(+)} |\phi_{in}\rangle = \Omega_+ H_0 |\phi_{in}\rangle = E \Omega_+ |\phi_{in}\rangle$

důsledek $\forall |\phi\rangle$ def $\Omega_{(+)} |\phi\rangle \equiv |\phi^{(+)}\rangle$

$|\phi\rangle$ stacionární stav (řešení H_0) $\Rightarrow |\phi^{(+)}\rangle$ stac. stav (pro H)

• důsledek zákona zachování:

$$\langle \vec{p} | S | \vec{p}\,' \rangle = \delta_3(\vec{p}\,' - \vec{p}) - 2\pi i\, \delta(E_{p'} - E_p)\, t(\vec{p}\,' - \vec{p})$$

→ definuje „ON-SHELL T-matici"

obecnější případ: baze $|E, \alpha\rangle$ .. vl. vektor H_0, A

$$\to \langle E, \alpha | S | E', \alpha' \rangle = \delta(E - E') \cdot S_{\alpha\alpha'}(E),$$

unitarita S-operátoru $\Rightarrow$ matice $S_{\alpha\alpha'}$ je unitární $\forall E$

$\Rightarrow$ vlastní čísla $S_n \equiv e^{2i\delta_n}$

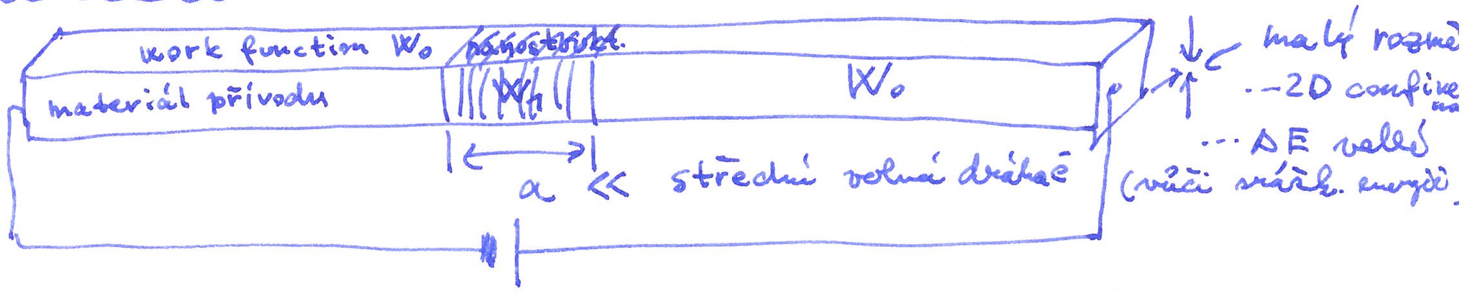
$\equiv$ vlastní fáze (eigenphases)

pozorovatelné veličiny z S-matice

QM-R-5

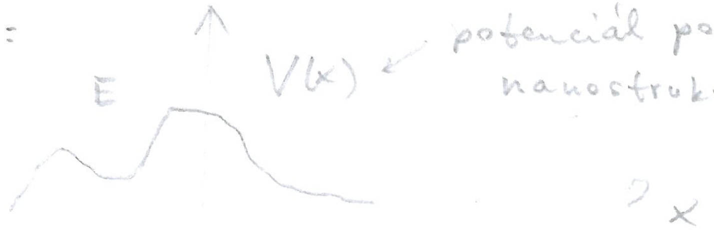
PŘ: částice v 1D ... pravděpodobnost odrazu a průchodu bariérou.

fyzikální motivace: např: průchod proudu nanostrukturami:



... v určitém režimu lze průchod proudu popsat jako sekvenční tunelování elektronů. Proud je úměrný p_T .. pravd. průchodu

MODEL: částice v 1D:



in asymptota ... vlnový balík $\phi_{in}(p)$

v čase $t \ll 0$ ... $\langle\phi|V|\phi\rangle = 0$ ... čas vývoj $H_0 = \frac{p^2}{2m}$

p .. integrál pohybu

out asymptota – vlnový balík $|\phi_{out}\rangle = S|\phi_{in}\rangle$

v časech $t \gg 0$ opět $\langle\phi|V|\phi\rangle = 0$ a p je integrálem pohybu

.. pravd. průchodu: $p_{(p>0)}(|\phi_{out}\rangle) = \int_0^\infty |\phi_{out}(p)|^2 dp \equiv p_T$

pravd. pro odrazu: $p_{(p<0)} = \int_{-\infty}^0 |\phi_{out}(p)|^2 dp \equiv p_R$

problém: $\langle p|S|p'\rangle = \delta(p-p') - 2\pi i\, \delta(E_{p'}-E_p)\, t(p' \leftarrow p)$

nejraději bychom zvolili ostrou hodnotu hybnosti $\phi_{in}(p) = \delta(p-p_0)$, ale ve výpočtu p by se objevilo $|\delta(p-p_0)|^2$ .. není dobře def.

regularizace: uvažujme úzký balík $\phi_{in}(p) =$ ... Δp .. malé, p_0 ... třeba Gauss, ale ne nutně

pak: ODRAZ:

$$p_R = \int_{-\infty}^0 dp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp' \langle p|S|p'\rangle \phi_{in}(p') \right\}^* \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dp'' \langle p|S|p''\rangle \phi_{in}(p'') \right\}$$

$$= (2\pi)^2 \int_{-\infty}^0 dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{-\infty}^{\infty} dp'' \, \phi_{in}^*(p')\, \phi_{in}(p'') \underbrace{\delta(E_p - E_{p'})}_{\frac{m}{p}\delta(p+p')} \underbrace{\delta(E_p - E_{p''})}_{\frac{m}{p}\delta(p+p'')} t(p' \leftarrow p)^* \, t(p'' \leftarrow p)$$

t_g ~~$\mu_R = \frac{2\pi m}{p}$ ...~~

$$\mu_R = (2\pi m)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{p^2} |\phi_{in}(p)|^2 |t(-p\leftarrow p)|^2 \simeq \left|\frac{2\pi m}{p} t(-p_0\leftarrow p_0)\right|^2 \equiv |S_{-+}(p_0)|^2$$

podobně: $$\boxed{\mu_T = \left|1 - 2\pi i \frac{m}{p} t(+p_0 \leftarrow p_0)\right|^2 \equiv |S_{++}(p_0)|^2}$$

mimochodem; zavedl jsem:

$$\langle p'|S|p\rangle = \delta(p-p') - 2\pi i\,\delta(E_{p'}-E_p)\, t(p'\leftarrow p)$$

... $p = n\cdot|p|$ n ... směr $= \pm 1$

$$\rightarrow \langle p' n'|S|p n\rangle = \delta_{nn'}\,\delta(|p|-|p'|) - \frac{2\pi i m}{p}\,\delta(|p|-|p'|)\underbrace{t(p'\leftarrow p)}_{= t(n'|p|\leftarrow n|p|)}$$

$$\equiv \delta(|p|-|p'|)\, S_{n'n}(|p|)$$

... S-matice ... matice $2\times 2 \equiv \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} \\ S_{-+} & S_{--} \end{pmatrix}$

(na energ. slupce)

unitarita $\Rightarrow S^+S = 1 \rightarrow |S_{++}|^2 + |S_{-+}|^2 = 1 = \mu_R + \mu_T$

závěr: je třeba nějak najít $S_{nn'}(E)$ nebo $t(p'\leftarrow p)$

pozn: podobný postup ve 3D

$\phi_{in}(\vec p)$ úzký kolem p_0

lok. v prostoru kolem x_0

+ středování přes $\vec b$ ... $\int d^2b\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec b\cdot\vec p}$ ← dodá rozměr plochy

⇒ pravd. rozptylu do $\Delta\Omega = \int\int_0^\infty |\phi_{out}(p,\theta,\varphi)|^2\, dp\, d\Omega$, $(\theta,\varphi)\in\Delta\Omega$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(p_{out}\leftarrow p_{in})|^2$$; kde $|p_{out}|=|p_{in}|$ .. zachov. energie a směr p_{out} míří do $\Delta\Omega$

(pro směr $p_{out} \neq p_{in}$)

a $f(p_{out}\leftarrow p_{in}) = -(2\pi)^2 m\, t(\vec p_{out}\leftarrow \vec p_{in})$

nezávisle na tvaru balíčku ϕ_{in} za předp., že dost úzký

... za chvíli odvodíme jinak → jednodušeji

(nebo viz Teoretická atomová fyzika)

pozn: • také zde lze psát $\langle |p|,\vec n'|S||p|,\vec n\rangle = \delta(|p|-|p'|)\, S_{n'n}(E)$

$$\rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 |S_{n'n}(E)|^2$$

• ve 2D: $$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{2\pi}{p}\right) |S_{n'n}(E)|^2$$

3) Časově nezávislý formalismus teor. rozptylu [QM-R-7]

formulace pomocí limit $t \to \pm\infty$ časového vývoje není moc praktická pro výpočty (pozn ... o numerických wave-packet metodách)

cíl: najít měřitelné veličiny (t_j $|S_{\lambda,\alpha}|^2$ příp. $|t|^2$) pomocí stacionárních stavů .. tj řešení (SR) se správ. okraj podm.

klíč: Fourierova transformace: $|\psi(t)\rangle = \int |\psi_E(t=0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}Et} dE$

pozoruj: platí (viz str 4) $H\Omega_{(+)} = \Omega_{(+)}H_0$

tj pokud $H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle \Rightarrow |\phi^{(+)}\rangle \equiv \Omega_{(+)}|\phi\rangle$

splňuje $H|\phi^{(+)}\rangle = E|\phi^{(+)}\rangle$

pokusíme se zjistit více o $|\phi^{(+)}\rangle$: ... speciálně $|\phi\rangle = |\vec{p}\rangle$

$|\phi^{(+)}\rangle \equiv |\psi_p^{(+)}\rangle$

... rozptylový stav $\longrightarrow$

z definice $\Omega_{(+)}$:

$$|\psi_p^{(+)}\rangle = \Omega_{(+)}|\vec{p}\rangle = \lim_{t\to-\infty} \underbrace{U^+(t)\,U^0(t)|\vec{p}\rangle}_{\phi(t) = \phi(t=0) + \int_0^t \frac{d\phi(\tau)}{d\tau}d\tau}$$

$$= |\vec{p}\rangle - \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\frac{d}{d\tau}\left[\cancel{\ldots}\, e^{\frac{i}{\hbar}H\tau} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0\tau}\right]}_{\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}H\tau}(H-H_0)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0\tau}} |\vec{p}\rangle$$

$$= |\vec{p}\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{i}{\hbar}(H-E_p)\tau}\, V|\vec{p}\rangle\, d\tau$$

---

tohle nekonverguje .. důvod .. $|\vec{p}\rangle$ není L^2 funkce .. jinak by integrál konvergoval díky rozplývání vlnového balíku

.. součin $V|\phi(t)\rangle$ vymizí

trik: pro stacionární stav $|\vec{p}\rangle$ ... adiabatické zapínání potenciálu $V \longrightarrow Ve^{\varepsilon t}$ $\varepsilon \to 0+$

.. to je košér ... ve skutečnosti počítáme vln balíky a ty to nepoznají

$$|\psi_p^{(+)}\rangle = |\vec{p}\rangle + \hat{G}^{(+)}V|\vec{p}\rangle \quad , \text{kde } \hat{G}^{(+)}(E) \equiv (E + i\varepsilon - H)^{-1}$$

(bezčasová) Greenova funkce

• VÝZNAM STACIONÁRNÍCH ROZPTYLOVÝCH STAVŮ:

když připravíme částici na IN asymptotě ve stavu $\int \phi(\vec{p})|\vec{p}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} d\vec{p}$

tvar vln. klubka

částice zůstane celou dobu ve stavu

$\int \phi(\vec{p})|\psi_p^{(+)}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t} d\vec{p}$ ... důvod: linearita $\Omega_{(+)}$

vsuvka → bezčasové Greenovy funkce (rezolventa)

Def: rezolventa $\hat G(z) \equiv (z-H)^{-1}$

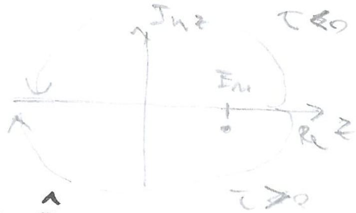
Greenovy funkce: $\hat G^{(\pm)}(E) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0+}(E\pm i\varepsilon - H)^{-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\hat G(z)\big|_{z=E\pm i\varepsilon}$

Vlastnosti:

• G jako Fourierova transformace evolučního operátoru:

platí: $$\hat G^{(+)}(t_2,t_1) \equiv \theta(t_2-t_1)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H(t_2-t_1)} = i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE}{2\pi}\,\frac{\exp\{-\frac{i}{\hbar}E(t_2-t_1)\}}{E+i\varepsilon-H}$$

DK: $$\int_{-\infty}^{\infty} dE\, \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E\tau}}{E+i\varepsilon-E_n} = \oint dz\, \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}zE}}{z-(E_n-i\varepsilon)} \quad \text{po dráze}$$



$$= \theta(\tau)(-2\pi i)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n\tau}$$

+ spektrální rozklad $H = \sum_{n\alpha} |E_n\alpha\rangle E_n\langle E_n\alpha| = \sum_n E_n \hat P_n$

$$\to\ -2\pi i\,\theta(\tau)\, e^{-\frac{i}{\hbar}H\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, \frac{\exp\{-\frac{i}{\hbar}E\tau\}}{E+i\varepsilon-H} \quad \Rightarrow \text{c.b.d.}$$

podob. $\hat G^{(-)}$

• význam $i\varepsilon$

v teorii distribucí: $\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{v.p.}{x} - i\pi\delta(x)$

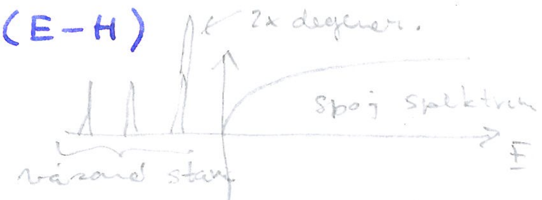
(DK: $\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - i\pi \boxed{\frac{\varepsilon/\pi}{x^2+\varepsilon^2}}$ .. → δ-posloupnost

$$\Rightarrow\ G^{(+)}(E) - G^{(-)}(E) = \frac{1}{E+i\varepsilon-H} - \frac{1}{E-i\varepsilon-H} = -2\pi i\,\delta(E-H)$$

tj.. spektrální funkce $\hat\rho(E) = \frac{i}{2\pi}\left(G^{+}(E)-G^{(-)}(E)\right) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,G^{(+)}(E)$

tj $\hat\rho(E) = \sum_n P_n\,\delta(E-E_n) \equiv \delta(E-H)$

...hustota stavů $\rho(E) \equiv \mathrm{Tr}\,\hat\rho(E) =$



• Rezolventní rovnice ... def $\hat G_0^{(+)} \equiv (E+i\varepsilon-H_0)^{-1}$

platí: $$\hat G^{(+)}(E) = (E+i\varepsilon-H_0)^{-1}\left[(E+i\varepsilon-H_0)-V+V\right](E+i\varepsilon-H)^{-1}$$

tj $$\hat G^{(+)}(E) = \hat G_0^{(+)}(E) + \hat G_0^{(+)}(E)\, V\, \hat G^{(+)}(E)$$

stejně pro $G^{(-)}$; rovněž symetricky $G = G_0 + GVG_0$

• Platí: Lemma: $1 + GV = (1-G_0V)^{-1}$

DK: $$(1+GV)(1-G_0V) = 1 + GV \underbrace{- G_0V - GVG_0V}_{-(G_0+GVG_0)V\, =\, -GV} = 1 \qquad \text{Q.E.D.}$$

QM-R-9

Lippmann–Schwingerova rovnice pro $|\psi_p^{(+)}\rangle$

ukázali jsme: $|\psi_p^{(+)}\rangle = (1+G^{(+)}V)|\vec{p}\rangle = (1-G_0^{(+)}V)^{-1}|\vec{p}\rangle$

tj. $$\boxed{|\psi_p^{(+)}\rangle = |\vec{p}\rangle + G_0^{(+)}V|\psi_p^{(+)}\rangle}$$

pozn.: • na rozdíl od stac. (SR) má jednoznačné řešení
$(E-H)|\psi\rangle = 0$

• souvislost: $(E-H)|\psi\rangle = (E-H_0-V)|\psi\rangle = 0$

tj. $(E-H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle$

+ řešení metodou G-fce $\cdot\, \langle x|(E-H_0)G|x'\rangle = \delta(x-x')$

$\longrightarrow |\psi\rangle = |\text{partik. řeš.}\rangle + \int G(E,x,x')\,V(x')\,\psi(x')\,dx'$

... různá řešení (SR) různou volbou

Greenova funkce volné částice v x-reprezentaci:

ve 3D platí: $G_0^{(\pm)}(E,x,x') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\exp\{\pm\frac{i}{\hbar}p_E|\vec{x}-\vec{x}'|\}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$; kde $p_E = \sqrt{2mE}$

$\frac{2m}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{4\pi}$

DK: $\langle x|G_0^{(+)}(E)|x'\rangle = \int d^3p\,\langle x|G_0|p\rangle\langle p|x'\rangle = \int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{E+i\varepsilon-E_p}$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty dp\,\frac{p^2}{E+i\varepsilon-E_p}\;\underbrace{2\pi\int_0^\pi \underbrace{\sin\theta\,d\theta}_{d\mu}\, e^{\frac{i}{\hbar}pr\cos\theta}}_{2\pi\hbar\int_{-1}^{1}d\mu\, e^{ipr\mu} = 2\pi\hbar\left[e^{ipr}-e^{-ipr}\right]\frac{1}{ipr}}$$
.. $p=|\vec{p}|$ $\quad r=|x-x'|$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{ir}\int_{-\infty}^{\infty}p\,dp\,\frac{\exp(ipr)}{E+i\varepsilon-p^2/2m} = \frac{2mi}{(2\pi\hbar)^2}\cdot\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}p\,dp\,\frac{\exp(ipr)}{(p-p_E-i\varepsilon)(p+p_E+i\varepsilon)}$$

Resid. věta

$$= \frac{2mi}{(2\pi\hbar)^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot 2\pi i\cdot\frac{+p_E\,e^{+ip_Er}}{2p_E}$$

$\rightarrow$ c.b.d.

L-S rovnice v x-reprezentaci:

$$\psi_p^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} - \left(\frac{1}{4\pi}\right)\int d^3x'\,\frac{\exp\{\frac{i}{\hbar}p_1|\vec{x}-\vec{x}'|\}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,U(x')\,\psi_p^{(+)}(x')$$

$\hookrightarrow U = \frac{2m}{\hbar^2}V$

poznámka: v 1D: $G_0^{(\pm)}(E,x,x') = \pm\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\frac{1}{2ik}e^{\pm ik|x-x'|}$ ... $k=\frac{p_E}{\hbar}$

~~Asymptotika stacionárního rozptyl. řešení~~

~~(LS) rce v x-reprezentaci:~~

- perturbační řešení LS rovnice:

$$|\psi_{(0)}\rangle = |\vec p\rangle \longrightarrow |\psi_{(1)}\rangle = |\vec p\rangle + G_0 V|\psi_{(0)}\rangle \ldots \longrightarrow |\psi_{(n+1)}\rangle = |\vec p\rangle + G_0 V|\psi_{(n)}\rangle$$

→ Bornova řada: $|\psi\rangle = |\vec p\rangle + G_0 V|\vec p\rangle + (G_0V)^2|\vec p\rangle + \ldots$

$$= \underbrace{(1 + G_0V + (G_0V)^2 + \ldots)}_{\hookrightarrow \text{ geom. řada } (1-G_0V)^{-1}\,!}|\vec p\rangle$$

pozn: konvergence a souvislost s čas. poruch. teorií ... příští semestr

Bornova řada pro g-funkci: $G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E)\,V\,G^{(+)}(E)$

→ iterací nebo rozvojem $G = (1-G_0V)^{-1}G_0 = G_0 + G_0VG_0 + (G_0V)^2G_0 + \ldots$

T-operátor: můžeme psát: $G = G_0 T G_0$; kde

$$T(E) \equiv V + VG^{(+)}(E)V \quad (= V + VG_0T)$$

LS rce pro T

nebo Bornova řada pro T: $T = V + VG_0V + (VG_0)^2V + (VG_0)^3V + \ldots$

- v každém případě .. Bornova řada .. řada v mocninách (G_0V)
  .. očekáváme konvergenci pro „malé" V
  „velké" E

Užitečné relace: $\boxed{G_0T = GV}$; $\boxed{TG_0 = VG}$

$$\boxed{V|\psi_p^{(+)}\rangle = T|\vec p\rangle}$$

důkaz: je vidět srovnáním řad

Souvislost T-operátoru a S-matice

$$\langle \vec p\,'|S|\vec p\rangle = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t'\to-\infty}} \langle \vec p\,'|e^{iH_0t}e^{-iHt}e^{iHt'}e^{-iH_0t'}|\vec p\rangle = \langle p'|\Omega_{(-)}^\dagger\Omega_{(+)}|p\rangle$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\langle \vec p\,'|\underbrace{e^{iH_0t}e^{-2iHt}e^{iH_0t}}|\vec p\rangle$$

$$\hookrightarrow F(t) = F(0) + \int_0^\infty \frac{dF}{d\tau}d\tau = I - i\int_0^\infty d\tau\,\{e^{iH_0\tau}Ve^{-2iH\tau}e^{iH_0\tau} + e^{iH_0\tau}e^{-2iH\tau}Ve\ldots$$

tj $\langle \vec p\,'|S|\vec p\rangle = \delta_{(3)}(p'-p) - i\int_0^\infty d\tau\,\langle p'|Ve^{i(E_{p'}+E_p-2H)\tau} + e^{i(E_{p'}+E_p-2H)\tau}V|p\rangle$

dimenze, ale celé odvození nezávisí na dimenzi

jednodušší integrál, ale konverguje jen po záměně

$\varepsilon\to0+$ $\quad V \longrightarrow Ve^{-\varepsilon\tau}$ ... ... to je košér .. $t' = -\tau$!

... jako u výpočtu $\Omega(+)$

tedy:

$$\langle p'|S|p\rangle = \delta(p-p') + \frac{1}{2}\langle p'|\underbrace{V G^{(+)}\left(\frac{E_{p'}+E_p}{2}\right)}_{T\left(\frac{E_{p'}+E_p}{2}\right) G_0^{(+)}(\tilde{E})} + \underbrace{G^{(+)}\left(\frac{E_{p'}+E_p}{2}\right) V}_{G_0(\tilde{E})\, T(\tilde{E})}|p\rangle$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{E_{p'}+E_p}{2}$$

$$= \delta(p-p') + \frac{1}{2}\langle p'|T(\tilde{E})|p\rangle \underbrace{\left\{\frac{2}{E_{p'}-E_p+2i\varepsilon} + \frac{2}{E_p-E_{p'}+2i\varepsilon}\right\}}_{-2\pi i\,\delta(E_p-E_{p'})}$$

tj. $\langle \vec{p}'|S|\vec{p}\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}') - 2\pi i\,\delta(E_{p'}-E_p)\langle p'|T(E_p)|p\rangle$

srovn:

$$\langle p'|S|p\rangle = \delta(p-p') - 2\pi i\,\delta(E_{p'}-E_p)\, t_{p'\leftarrow p}$$

$\Rightarrow$ Element T-matice: $t_{p'\leftarrow p} = \langle p'|T(E_p)|p\rangle = \langle p'|V|\psi_p^{(+)}\rangle$

pozn: .. připomenutí .. pomocí $t_{p'\leftarrow p}$ umíme počítat pravd. odrazu, průchodu a diferenciální účinný průřez.
.. teď se to umíme pomocí $|\psi_p^{(+)}\rangle$

další výpočet:

Asymptotika stacionárního rozptyl. řešení:

x-reprezentace:

$$\psi_p^{(+)}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \int d^3x' \frac{e^{\frac{i}{\hbar}p|\vec{x}-\vec{x}'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{x}')\,\psi_p^{(+)}(\vec{x}')$$

chování pro $r \equiv |\vec{x}| \to \infty$: $|x-x'| = \sqrt{(r\vec{n}-\vec{x}')} \simeq r\left(1-2\vec{n}\cdot\frac{\vec{x}'}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\simeq r - \vec{n}\cdot\vec{x}'$$

tj. $$\psi(\vec{x}) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\left(e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \underbrace{- \frac{(2\pi\hbar)^3\, 2m}{4\pi\cdot\hbar^2} \int \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}p\vec{n}\cdot\vec{x}'}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \cdot V(x')\psi(x')\,dx'}_{-m\hbar(2\pi)^2\langle\vec{p}'|V|\psi_p^{(+)}\rangle \equiv f(\theta,\varphi)\equiv f(\vec{n})} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}pr}}{r}\right)$$

$\vec{p}' \equiv p\cdot\vec{n}$

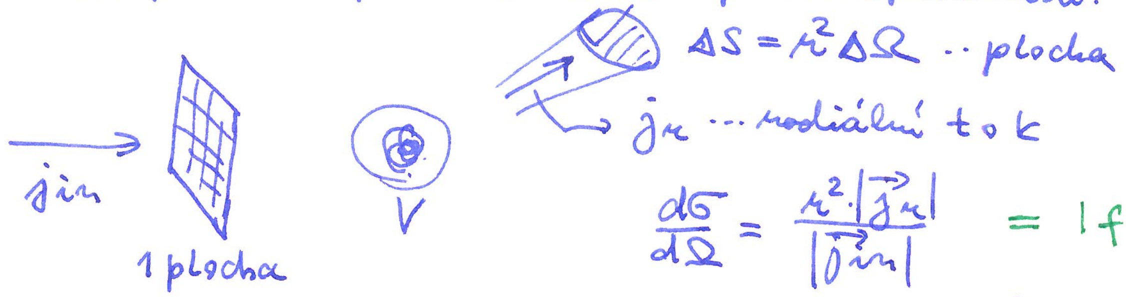
tj. $$\boxed{\psi(\vec{x}) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} + f(\vec{n})\frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar}pr}\right)}$$

- dost daleko od inter. oblasti
- ψ = přicház. rovinná vlna + radiální odcházející vlna

interpretace:

složité

• interpretace pomocí toků pravděpodobnosti:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 |\vec{j}_r|}{|\vec{j}_{in}|} = |f|^2$$

přitom $\vec{j}_{in} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_{in}^* \nabla \psi_{in} - \psi_{in} \nabla \psi_{in}^*\right) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\vec{p}}{m}$

$$\vec{j}_r = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_{out}^* \frac{\partial}{\partial r} \psi_{out} - c.c.\right) = \frac{|f|^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p}{m} \cdot \frac{1}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

tj $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2}$; kde $\boxed{f \equiv -m\hbar (2\pi)^2 \langle p' | V | \psi_p^{(+)} \rangle}$

diferenciální úč. průřez — amplituda rozptylu; T-matice (operátor)

• implementace okraj. podmínky → vypadá ošklivě, ulehčíme si pro sfér. sym $V(r)$

numericky jednodušší: $\psi_p^{(+)}(\vec{x}) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}}_{\equiv \phi_p(\vec{x})} + \psi_{scatt}(\vec{x})$

pak: $(E-H)\psi = (E - H_0 - V)(\phi_p + \psi_s) = (E-H)\psi_s - V\phi_p = 0$

tj $\psi_s(\vec{x})$ splňuje nehomogenní (SR): $(E-H)\psi_s = V \cdot \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}$

okrajová podmínka: ... $\psi_s = \frac{1}{r}\chi(r) Y_{lm}(\theta,\varphi)$;

kde $\chi'(r) = \frac{i}{\hbar}|p|\chi(r)$

pozn: - prakticky se implementují absorbujícími potenciály

• ASYMPTOTIKA PRO $\psi_p^{(+)}$ v 1D:

$$\psi_p^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ikx} + \int \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x'|} \cdot \frac{2m}{\hbar} V(x')\psi(x')\,dx'$$

$\boxed{x \to +\infty}$: $\psi \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ikx} \underbrace{\left(1 - 2\pi i \frac{m}{p} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ikx'} V(x')\psi(x')\,dx'}_{\langle p | V | \psi_p^{(+)}\rangle}\right)}_{S_{++}}$

$\boxed{x \to -\infty}$: $\psi \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[e^{ikx} + e^{-ikx} \underbrace{\left(-2\pi i \frac{m}{p} \underbrace{\int \frac{dx'}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ikx'} V(x')\psi(x')}_{\langle -p | V | \psi_p^{(+)}\rangle}\right)}_{S_{-+}} \right.$

praktické shrnutí teorie rozptylu

① $|\phi_{out}\rangle = S|\phi_{in}\rangle$

kde ↑ ↗ reprezentují volný balík na asymptotách ve stejném čase

② S - je jednodušší v p-reprezentaci:

$$\langle \vec{p}\,' | S | \vec{p} \rangle = \delta(\vec{p}\,' - \vec{p}) - 2\pi i\, \delta(E_{p'} - E_p)\, t_{p' \leftarrow p}$$

kde $t_{p' \leftarrow p} = \langle p' | T(E_p) | p \rangle = \langle p' | V | \psi_p^{(+)} \rangle$

③ nalezení $|\psi_p^{(+)}\rangle$:

buď (a) řešení (LS) rovnice $|\psi_p^{(+)}\rangle = |p\rangle + G_0^{(+)}(E_p) V |\psi_p^{(+)}\rangle$

nebo (b) řešení (SR): $(E - H)|\psi_p^{(+)}\rangle = 0$

+ okraj. podmínka $\psi_p^{(+)}(\vec{x}) \xrightarrow[r \to \infty]{} \langle x | p \rangle$ + odcházející vlna

... a koeficient u odcházející vlny lze normou vyjádřit $t_{p' \leftarrow p}$

④ měřitelné veličiny:

3D: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$ kde $f = -m\hbar (2\pi)^2 t_{p' \leftarrow p}$ směr vektoru $\vec{p}\,'$ udává θ a φ

1D: $p_T = |S_{++}|^2 = \left|1 - 2\pi i \frac{m}{p} t_{+p \leftarrow p}\right|^2$ ... okraj podmínky: $e^{ikx} + S_{-+} e^{-ikx} \,|\equiv|\, S_{++} e^{ikx}$

$p_R = |S_{-+}|^2 = \left|-2\pi i \frac{m}{p} t_{-p \leftarrow p}\right|^2$

QM-R-14

4) Rozptyl na sférický sym. potenciálu
– metoda parciálních vln.

Hlavní body: – (SR) nebo (LS) se redukuje na 1D problém v radiální souřadnici r, ale jen pokud úhlová část je vl. fcí L^2, L_z ... $Y_{lm}(\theta,\varphi)$

– okrajová podmínka obsahuje rovinnou vlnu → suma přes příspěvky pro různá l .... výsledný stac. rozptyl. stav $\psi_p^{(+)}$ je lin. komb. ∞ mnoha parciálních vln $\psi_{lp}^{(+)}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

$\langle x|k_{lm}\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k\, j_l\, Y_{lm}$

$\left(= \sum_{lm} \langle x|lm\rangle\langle lm|p\rangle\right)$

podrobněji: už jsme ukázali, že

$$(*)\qquad e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{lm} \underbrace{4\pi (i)^l Y_{lm}^{*}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)}_{c_{lm}} \underbrace{j_l(kr) Y_{lm}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right)}_{\text{vl. vektor } H_0, L^2, L_z}$$

úloha: hledáme řešení $\hat{H}|\psi_p^{(+)}\rangle = E|\psi_p^{(+)}\rangle$
(SR)

s okraj. podmínkou $\psi_p^{(+)}(\vec{x}) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f\left(\frac{\vec{x}}{r}\right)\frac{1}{r}e^{ikr}\right)$

řešení: $\psi_p^{(+)}(\vec{x}) = \sum_{lm} \tilde{a}_{lm} R_{kl}(r) Y_{lm}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right)$, kde

$R_{kl}(r)$ splňuje $R'' + \frac{2}{r}R' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r)\right]R = 0$ (RSR)

s podmínkou $\chi(r) = rR(r)\big|_{r=0} = 0$

řešení pro $U=0 \Rightarrow f=0$ známe: $(*)$

$$\to \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sum_{lm} c_{lm} j_l(kr) Y_{lm}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right) \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{lm} \frac{c_{lm}}{\cancel{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) Y_{lm}$$

$$\psi_p^{(+)}(\vec{x}) = \sum_{lm} \frac{\cancel{\ \ }}{\cancel{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}}\, \tilde{a}_{lm} R_{kl}(r) Y_{lm} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{lm} \frac{\tilde{a}_{lm}}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) Y_{lm}$$

podrobněji

obecné řešení (RSR) pro $r\to\infty$, kde $U(r)=0$:

$$R_{kl}(r) \longrightarrow A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr) \longrightarrow N_l \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right)$$

$j_l(kr) \to \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)$, $\quad n_l(kr) \to -\frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)$

$A_l \to N\cos\delta_l$, $\quad B_l \to -N\sin\delta_l$

$\boxed{\text{BÚNO } N_l = 1}$ (poučeno do a_{lm})

..... vektor $(A, -B)$ v polárních souř.

Rozptyl řešení:

$$\psi_p^{(+)}(\vec{x}) = \sum_{\ell m} \bar{a}_{\ell m} R_{k\ell}(r) Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right) \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{\ell m} \frac{\bar{a}_{\ell m}}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi \ell}{2} + \delta_\ell\right) Y_{\ell m}$$

$$\frac{1}{2i}\left[e^{i(\ )} - e^{-i(\ )}\right]$$

$$= \left(\sum_{\ell m} \bar{a}_{\ell m} \frac{(-i)^\ell}{2i} e^{i\delta_\ell} Y_{\ell m}\right) \frac{1}{kr} e^{ikr} - \left(\sum_{\ell m} \bar{a}_{\ell m} \frac{(+i)^\ell}{2i} e^{-i\delta_\ell} Y_{\ell m}\right) \frac{1}{kr} e^{-ikr}$$

okraj. podmínka:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + f(\vec{p}',\vec{p})\frac{1}{r}e^{ikr}\right) \xrightarrow{r\to\infty} \left[f(p',p) + \sum_{\ell m} \bar{c}_{\ell m} \frac{(-i)^\ell}{2i} Y_{\ell m} \frac{1}{k}\right] \frac{1}{r} e^{ikr} - \sum_{\ell m} \bar{c}_{\ell m} \frac{(+i)^\ell}{2i} Y_{\ell m} \frac{1}{kr} e^{-ikr}$$

$$\vec{p}' = p\frac{\vec{x}}{r}$$

$\Rightarrow$ srovn. členů u e^{-ikr} $\longrightarrow$ $a_{\ell m} = e^{i\delta_\ell} c_{\ell m}$

srovn. členů u e^{ikr} $\longrightarrow$ $f(p',p) = \frac{1}{k}\sum_{\ell m} \frac{(-i)^\ell}{2i} Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right) \underbrace{\left[a_{\ell m} e^{i\delta_\ell} - c_{\ell m}\right]}_{c_{\ell m}\left[e^{2i\delta_\ell} - 1\right]}$, $\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\vec{p}'}{p}$

+ dosazení $c_{\ell m} = 4\pi (i)^\ell Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)$, $= \frac{\vec{k}}{k}$

$$\rightarrow \boxed{f(\vec{p}',\vec{p}) = -\frac{2\pi i}{k}\sum_{\ell m} Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}'}{p}\right) Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)\left[e^{2i\delta_\ell} - 1\right]}$$

poznámky:

- ve sfér. sym. případě stačí najít δ_ℓ řešením radiální rovnice a amplituda rozptylu určena funkcí ↑
- ještě o významu fáz. posunutí δ_ℓ:

platí: $\langle p' | S - I | p\rangle = -2\pi i\, \delta(E_p - E_{p'}) \frac{f(p',p)}{-m\hbar(2\pi)^2} = \frac{i}{2\pi m\hbar}\delta(E_p - E_{p'}) f$

na druhé straně $= \langle p' | (S - I) \int dE \sum_{\ell m} |E\ell m\rangle\langle E\ell m|p\rangle = \sum_{\ell m} \frac{1}{mp} Y'_{\ell m} Y^*_{\ell m} \delta(E - E')\left[e^{2i\delta} - 1\right]$

kde $\langle p | E\ell m\rangle = \frac{1}{\sqrt{mp}}\delta(E - E_p) Y_{\ell m}(\vec{p})$ a $S|E\ell m\rangle = e^{2i\delta_\ell}|E\ell m\rangle$

$$\Rightarrow f(p',p) = \frac{2\pi}{ik}\sum_{\ell m} Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}'}{p}\right) Y^*_{\ell m}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right)\left[e^{2i\delta_\ell} - 1\right]$$

tj. $e^{2i\delta_\ell}$ je S-matice v $|E\ell m\rangle$ bázi:

$$\langle E'\ell' m' | S | E\ell m\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta(E - E')\, e^{2i\delta_\ell(E)}$$

.. důsl. sfér. sym. ... S komut. s ÚSKO H_0, L^2, L_z $\rightarrow$ je fcí ℓ, m, E

pozn:

přepisuje se často ve tvaru:

$$f(\vec{p}',\vec{p}) = -2\pi i \sum_{lm} Y_{lm}(\vec{p}_0') Y^*_{lm}(\vec{p}_0) \frac{1}{k}[e^{2i\delta_l}-1]$$

$$= \sum_{lm} 4\pi\, Y_{lm}(\vec{p}_0') Y^*_{lm}(\vec{p}_0)\, f_l(k) = \sum_l (2l+1) f_l(k) P_l(\cos\theta)$$

kde jsme využili $\sum_m Y_{lm}(\vec{p}_0') Y^*_{lm}(\vec{p}_0) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{p}_0'\cdot\vec{p}_0)$ Legendre polynomy

.. OG systém na $\langle -1,1\rangle$

a $f_l(k) \equiv \frac{1}{2ik}[e^{2i\delta_l}-1] = \frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l$ ... parciální amplituda rozptylu

diferenciální účinný průřez: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$

speciální ... integrální $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int d^2 p_0' |f(\vec{p}',\vec{p})|^2$

tj $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \sum_{lm} \sum_{l'm'} (4\pi)^2 Y_{lm}(p_0) Y^*_{l'm'}(p_0) \underbrace{\int d\Omega_{p'} Y_{lm}(p_0') Y_{l'm'}(p_0')}_{\delta_{ll'}\delta_{mm'}} |f|^2$

$$= \sum_l (4\pi)^2 |f_l|^2 \underbrace{\sum_m Y_{lm}(p_0) Y^*_{lm}(p_0)}_{\frac{2l+1}{4\pi} \underbrace{P_l(1)}_{=1}} = 4\pi \sum_l (2l+1)|f_l|^2$$

neboli: $\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$

poznámka: viděli jsme

$$\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sum_{lm} (i)^l Y^*_{lm}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) Y_{lm}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right) j_l(kr)$$

reál. řeš. (SR) radiální

$$\langle \vec{x}|\psi^{(+)}_{\vec{p}}\rangle = \frac{4\pi}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sum_{lm} (i)^l Y^*_{lm}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) Y_{lm}\left(\frac{\vec{x}}{r}\right) \underbrace{e^{i\delta_l} R_{kl}(r)}_{\psi^{(+)}_{kl}(r)}$$

dá se dk: $\psi^{(+)}_{kl}(r) = j_l(kr) + \int_0^\infty G^{(+)}_{lk}(r,r')\, U(r')\, \psi^{(+)}_{kl}(r')\, r'^2 dr'$ (rLS)

kde $G^{(+)}_{lk}(r,r') = -ik\, j_l(kr_<)\, h^{(+)}_l(kr_>)$ $\quad r_< = \min(r,r')$, $r_> = \max(r,r')$

parciální složka $G_0^{(+)}(E)$ $\left(= \sum_{lm} G_l^{(+)} Y_{lm}(x) Y^*_{lm}(x')\right)$

a potom: $f_l(k) \equiv \frac{1}{2ik}[e^{2i\delta_l}-1] = -\int j_l(kr)\, U(r)\, \psi^{(+)}_{kl}(r)\, r^2 dr$

(QM-R-17)

PŘÍKLAD: ... (shrnutí postupu řešení rozptylu metodou parciálních vln)

Potenciál konečného dosahu ... $V(r)=0 \quad r>a$

... řešíme radiální (SR) pro $R_{kl}(r)$ nebo $\chi(r)=rR_{kl}(r)$

s poč. podmínkou $\chi(r=0)=0$

$\rightarrow$ vyjde $R_{kl}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} N(\cos\delta_l\, j_l(kr)-\sin\delta_l\, n_l(kr))$

$$\sim \frac{N}{kr}\sin\left(kr-\frac{\pi l}{2}+\delta_l\right)$$

pozn: řešení normované k $\delta(k-k')$ dostaneme volbou $N=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot k$

nalezení δ_l: ... napojit log. derivace:

$$\gamma \equiv \frac{\chi'(a)}{\chi(a)} = \frac{\cos\delta_l\,(j_l+ka\,j_l')-\sin\delta_l\,(n_l+ka\,n_l')}{a\cos\delta_l\cdot j_l-\sin\delta_l\cdot a\cdot n_l}$$

$$= \frac{j_l+ka\,j_l'-\mathrm{tg}\,\delta_l\,(n_l+ka\,n_l')}{a\,j_l-\mathrm{tg}\,\delta_l\,a\,n_l}$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\,\delta_l = \frac{j_l(ka)+ka\,j_l'(ka)+a\,\gamma(a)\,j_l(ka)}{n_l(ka)+ka\,n_l'(ka)+a\,\gamma(a)\,n_l(ka)}$$

$j_l'=\frac{l}{z}j_l-j_{l+1}$