Základní principy kvantové teorie

QM-I-9

(POSTULÁTY)

① Stav systému je popsán vektorem v komplexním LVP (stavový prostor $\equiv \mathcal{H}$), přesněji paprskem $\lambda\psi$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$.

② Pozorovatelným veličinám odpovídají Hermitovské lineární operátory. Přípustné hodnoty jsou dány jejich vlastními čísly. $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ ... $\hat{A}=\sum a\hat{P}_a$

③ Skalární součin na stavovém prostoru definuje tzv. amplitudu pravděpodobnosti. Podmíněná pravděpodobnost pro naměření hodnoty a pozorovatelné $\hat{A}$ systému připraveného ve stavu $|\psi\rangle$ je

$$p(a,\psi)\equiv|\langle a|\psi\rangle|^2 \quad (=\langle\psi|P_a|\psi\rangle = \sum_k |\langle a,k|\psi\rangle|^2 \text{ ... degenerované spektrum})$$

Po naměření hodnoty a systém přejde do stavu

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\hat{A}} |\bar{\psi}\rangle = |a\rangle \quad \left(=\frac{1}{\sqrt{p}}P_a|\psi\rangle \text{ .. degenerované spekrum}\right)$$

(Redukce stavu, kolaps vlnové funkce) ← motivace měřením ×

Poznámky:

- existují různé formulace / sady postulátů
- později přibereme unitární časový vývoj (princip koresp.) + konkrétní tvar operátorů pro různé systémy

Ad 1) - v ∞ dimenzích ... požadavky úplnosti / spojitosti → Hilbertův prostor (později)

- vlnovou funkci je výhodné normovat: $\|\psi\|^2=\langle\psi|\psi\rangle=1$ (stále není určená fáze!)

Ad 2) - z vlastností výše plyne, že měřitelné veličiny $a\in\mathbb{R}$ a vektory tvoří bázi → měřitelná hodnota je def. $\forall\psi\in\mathcal{H}$

Ad 3) - vzorec je uveden pro normovanou ψ. Pokud $\langle\psi|\psi\rangle\neq 1$ pak $p(a,\psi)=\dfrac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$ ← $|\psi\rangle \to \dfrac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}$

- střední hodnota pozorovatelné po mnoha měřeních:

$$\langle A\rangle = \sum_a p(a,\psi)\,a = \sum_a \langle\psi|\hat{P}_a|\psi\rangle\, a = \langle\psi|\sum_a aP_a|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

(Pokud $\langle\psi|\psi\rangle\neq 1$: $\langle A\rangle = \dfrac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

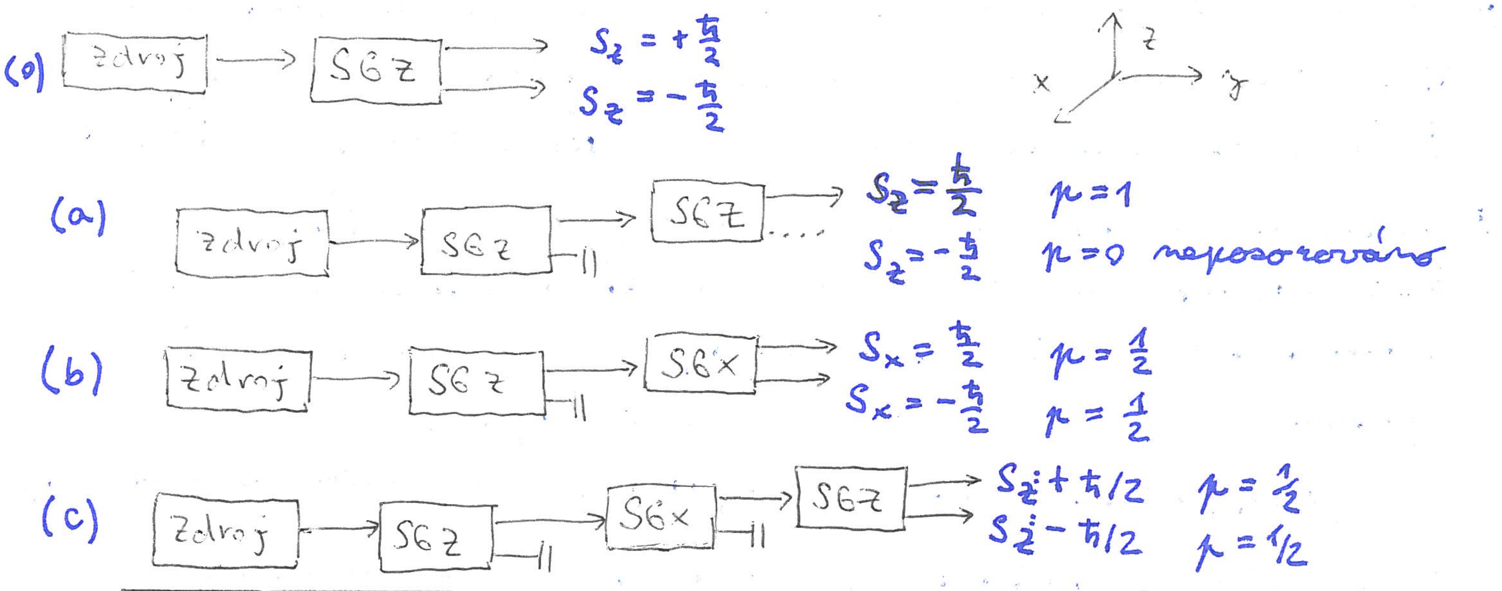
PŘÍKLAD:

částice se spinem 1/2 (Sakurai)

aplikace postulátů na Stern-Gerlachův experiment

→ konstrukce modelu na základě ↑

Několik experimentů (schéma):



(0): Nejjednodušší model na základě měření (0):

- stav. prostor $\mathcal{H} = \mathcal{L}\{|z+\rangle, |z-\rangle\}$ ← jsou ON (vl. v. $\hat{S}_x$) bůno normalizace

  ∀ stav $|\psi\rangle = \alpha|z+\rangle + \beta|z-\rangle \cong \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

- měření SGZ → hermit. matice $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-|\right)$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \sigma_z$$

popis 1. měření $|\psi\rangle$ neznáme, ale po měření $|\bar{\psi}\rangle = |z+\rangle$

(a): Druhé měření ... před $|\psi\rangle = |z+\rangle$ (nebo $\lambda|z+\rangle$)

$p(+\frac{\hbar}{2} = S_z, \psi) = |\langle z+|\psi\rangle|^2 = 1$

po měření: $|\bar{\psi}\rangle = |z+\rangle$

(b): Neznáme $\hat{S}_x$, ale pokusíme se jej najít

pozn: nepotřebujeme větší stav. prostor: $\mathcal{L}\{|z+x+\rangle, |z-x+\rangle, |z+x-\rangle, |z-x-\rangle\}$?

měření (c) říká že tento model nefunguje; zkusme pokračovat s $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

operátor $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-| \right)$

koneč. stav:

pozorujeme $p\left(s_x = +\frac{\hbar}{2}, |z+\rangle\right) = |\langle x+|z+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ $\quad |\psi\rangle = |x+\rangle$

$p\left(s_x = -\frac{\hbar}{2}, |z+\rangle\right) = |\langle x-|z+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ $\quad |\psi\rangle = |x-\rangle$

(c) $p\left(s_z = +\frac{\hbar}{2}, |x+\rangle\right) = |\langle z+|x+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

$p\left(s_z = -\frac{\hbar}{2}, |x+\rangle\right) = |\langle z-|x+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad |x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1}|z-\rangle$ $\quad$ ortogonalita

$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1}|z-\rangle$ $\quad \leftarrow$ $\langle x+|x-\rangle = 0$ fixuje druhou fázi

$\uparrow$ celková fáze libovolná ... v $\hat{S}_x$ se neprojeví

zatím máme: $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left[|x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-| \right] = \frac{\hbar}{2}\left[e^{-i\delta_1}|z+\rangle\langle z-| + e^{i\delta_1}|z-\rangle\langle z+| \right]$

IZOTROPIE PROSTORU: ...obrácení celého aparátu $\rightarrow$ stejný výsl.

$(z \rightarrow y \rightarrow z)$

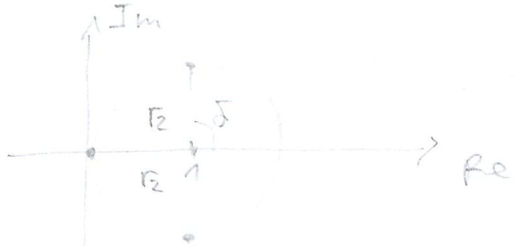
$\Rightarrow \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\left[e^{-i\delta_2}|z+\rangle\langle z-| + e^{i\delta_2}|z-\rangle\langle z+| \right] \rightarrow$ $\quad |y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + e^{i\delta_2}|-\rangle\right)$

$|y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - e^{i\delta_2}|-\rangle\right)$

další otočení aparátu: $(x \rightarrow y \rightarrow x)$

$\Rightarrow \quad |\langle y\pm|x+\rangle|^2 = |\langle y\pm|x-\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

tj. $\quad \frac{1}{2}\left|1 \pm e^{i(\delta_1 - \delta_2)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\rightarrow \quad \delta_2 - \delta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$ $\quad$ ... konvence fáze v bázi $|z\pm\rangle$

$\rightarrow$ dá se volit S_x reálná matice .. $\delta_1 = 0$

$\Rightarrow \delta_2 = +\frac{\pi}{2}$ $\quad$ (pravotočivé $|x+\rangle, |y+\rangle, |z+\rangle$)

závěr: $|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle \pm |z-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}$

$|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+\rangle \pm i|z-\rangle\right) \rightarrow$

$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| \right]$

$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\left[-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+| \right]$

Pauliho matice $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) \equiv \left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \right)$

$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$

Pozn: Posunovací operátory $\quad S_+ = \hbar|+\rangle\langle-| = \hbar\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\quad S_- = \hbar|-\rangle\langle+| = \hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = S_+^\dagger$

platí: $S_\pm = S_x \pm i S_y$

$S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle \quad S_-|-\rangle = 0$

$S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \quad S_+|+\rangle = 0$

Poznáme později obecně při vyšetřování momentu hybnosti a rotač. symetrie pozn: později uvidíme částice s větším spinem

$s=\frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{SG} \rightrightarrows$ $\qquad$ $s=1 \longrightarrow \boxed{SG}$ (3) $\qquad$ $s=\frac{3}{2} \longrightarrow \boxed{SG}$ (4)

e^-, p^+, n $\qquad$ např. d $\qquad$ atd.

$\hat S_x, \hat S_y, \hat S_z$: $\qquad$ matice 3×3 $\qquad$ matice 4×4

Přechod k jiné bázi

pozorovatelná $\hat A$ ... katalog stavů $|a_i\rangle$ $i=1,\dots d$

jiná pozorovatelná $\hat B$ ... $|b_i\rangle$

reprezentace A: $|\psi\rangle = \underset{\sum_i |a_i\rangle\langle a_i|}{I}|\psi\rangle = \sum_i \psi_i |a_i\rangle$; $\psi_i = \langle a_i|\psi\rangle$

$$= \sum_i \psi_i \underset{\sum_j |b_j\rangle\langle b_j|}{I}|a_i\rangle = \sum_j \underbrace{\Big[\sum_i \overbrace{\langle b_j|a_i\rangle}^{U_{ji}}\psi_i\Big]}_{\tilde\psi_j}|b_j\rangle$$

tj. matice přechodu k jiné bázi (reprezentaci): $\begin{pmatrix}\tilde\psi_1\\ \vdots\\ \tilde\psi_d\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_d\end{pmatrix}$

unitární matice $U^+U=I$: $\sum_j (U^+)_{ij}U_{ji'} = \sum_j U_{ji}^* U_{ji'}$
$$= \sum_j \langle b_j|a_i\rangle^*\langle b_j|a_{i'}\rangle = \delta_{ii'}$$

podobně operátory:
$$\tilde C_{jj'} \equiv \langle b_j|\hat C|b_{j'}\rangle = \sum_{ii'}\langle b_j|a_i\rangle C_{ii'}\langle a_{i'}|b_{j'}\rangle = UCU^+$$

Nekompatibilní pozorovatelné a relace neurčitosti

o momentech pravd. rozdělení: $\mu_n = \sum_a p_a a^n = \langle \hat A^n\rangle$

speciálně $\mu_0 = 1$ $\quad \mu_1 = \langle\psi|\hat A|\psi\rangle$ $\quad \mu_2 = \langle\psi|\hat A^2|\psi\rangle$

rozptyl měření veličiny A ve stavu ψ:

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle\psi|(\hat A - \langle A\rangle)^2|\psi\rangle = \langle\hat A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

... speciálně pro $|\psi\rangle = |a\rangle$ .. $p_a = 1$ $\quad p_{a'\neq a} = 0$

tj. $\mu_1 = a$, $\mu_2 = a^2$ a tedy $\Delta A \equiv \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2} = 0$

Relace neurčitosti:

nechť $[\hat{A},\hat{B}] = i\hat{C}$ ($\neq 0 \stackrel{def}{\equiv}$ Nekompatibilní)

to tady je, aby $\hat{C}^+ = \hat{C}$

potom $(\Delta A)\cdot(\Delta B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle|$

Důkaz: Schwarz nerovnost $\|\phi_1\|\cdot\|\phi_2\| \geq |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|$

pro $|\phi_1\rangle = (A-\langle A\rangle)|\psi\rangle \rightarrow \|\phi_1\| = \sqrt{\langle\psi|(A-\langle A\rangle)^2|\psi\rangle} = \Delta A$

$|\phi_2\rangle = (B-\langle B\rangle)|\psi\rangle$ podob $\|\phi_2\| = \Delta B$

pravá strana:

$$|\langle\phi_1|\phi_2\rangle| = |\langle\psi|(AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle)|\psi\rangle|$$

$$= |\langle\psi|(AB - \langle A\rangle\langle B\rangle)|\psi\rangle|$$

$$= |\langle\psi|\left(\frac{AB-AB}{2} + \frac{AB+AB}{2} - \langle A\rangle\langle B\rangle\right)|\psi\rangle|$$

$$= |\underbrace{\langle\psi|\frac{AB+BA}{2}|\psi\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle}_{\in\mathbb{R}} + \frac{i}{2}\underbrace{\langle\psi|C|\psi\rangle}_{\in\mathbb{R}}| \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|C|\psi\rangle| \quad \text{c.b.d.}$$

PŘ 1:
- Heizenberg $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \longrightarrow \Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
- spin 1/2 $[\hat{S}_z,\hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$ (ověřte! obecně $[\hat{S}_a,\hat{S}_b] = i\hbar\varepsilon_{abc}\hat{S}_c$) Levi-Civita

tj $\Delta S_x\cdot\Delta S_z \geq \frac{\hbar}{2}|\langle S_y\rangle|$

důsledky: 1) "ostrá hodnota" $\hat{S}_z$ … např: $|\psi\rangle = |z+\rangle \longrightarrow \Delta S_z = 0$

pak musí být $\langle S_y\rangle = 0$ tj $P_\pm = \frac{1}{2}$!

2) "ostrá hodnota" S_y .. tj $|\langle S_y\rangle| = \frac{\hbar}{2}$

$\rightarrow$ nesmí být $\Delta S_x = 0$ ani $\Delta S_z = 0$

tj ne vlastní stavy!

kompatibilní pozorovatelné

následující tvrzení řeší důsledky relace $[\hat{A},\hat{B}] = 0$

pro dvě pozorovatelné (hermitovské matice) $\hat{A},\hat{B}$

pozn: (triviální, ale důležitá) $[\hat{A},\hat{B}] = 0 \iff \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

tj ve výrazech lze prohazovat $A \leftrightarrow B$

Lemma 1: $[\hat{A},\hat{B}]=0 \;\wedge\; B|\psi\rangle = b|\psi\rangle \quad \Rightarrow B|\phi\rangle = b|\phi\rangle$
pro $|\phi\rangle = A|\psi\rangle$

DK: prostě dosadit $\phi = A|\psi\rangle$ do $B|\phi\rangle$ + užití předpokladu

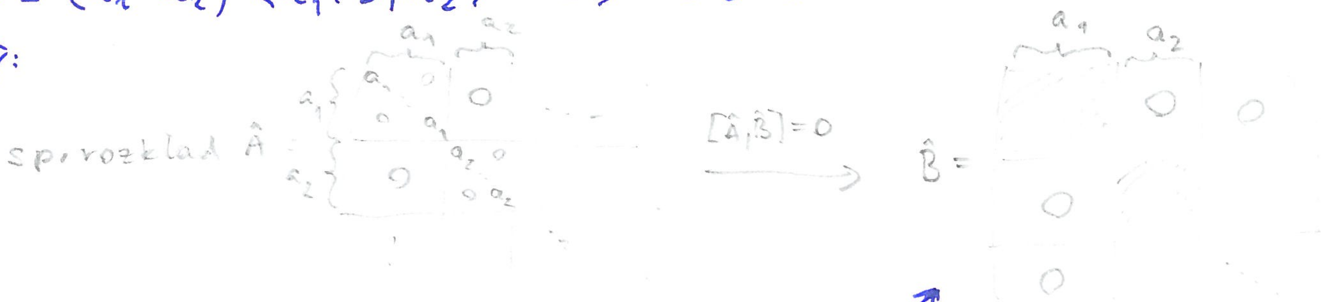
komentář: invariance vl. podprostorů B vůči působení A

Lemma 2: $[\hat{A},\hat{B}]=0 \quad \hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \quad a_1 \neq a_2 \quad \Rightarrow \langle a_1|\hat{B}|a_2\rangle = 0$

DK: $0 = \langle a_1|[\hat{A},\hat{B}]|a_2\rangle = \langle a_1|\hat{A}\hat{B}|a_2\rangle - \langle a_1|\hat{B}\hat{A}|a_2\rangle$

$0 = (a_1-a_2)\langle a_1|\hat{B}|a_2\rangle \rightarrow$ c.b.d.

komentář:



budeme hojně používat ve výpočtech

částečná diagonalizace B
známé spektum A

Lemma 3a: $[\hat{A},\hat{B}]=0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{P}_a,\hat{B}]=0$

$\hat{A} = \sum_a a\hat{P}_a \qquad \hat{B} = \sum_b b\hat{P}_b$

DK: baze vl. v. $\hat{A}$: $\hat{A}|a,\alpha\rangle = a|a,\alpha\rangle \rightarrow \hat{P}_a = \sum_\alpha |a\alpha\rangle\langle a\alpha|$

$$\langle a_1\alpha_1|[\hat{P}_a,\hat{B}]|a_2\alpha_2\rangle = \sum_\alpha \underbrace{\langle a_1\alpha_1|a\alpha\rangle}_{\delta_{a_1a}\delta_{\alpha_1\alpha}}\langle a\alpha|\hat{B}|a_2\alpha_2\rangle - \sum_\alpha \langle a_1\alpha_1|\hat{B}|a\alpha\rangle\underbrace{\langle a\alpha|a_2\alpha_2\rangle}_{\delta_{aa_2}\delta_{\alpha\alpha_2}}$$

$$= \delta_{a_1a}\langle a_1\alpha_1|\hat{B}|a_2\alpha_2\rangle - \delta_{aa_2}\langle a_1\alpha_1|\hat{B}|a_2\alpha_2\rangle$$

$= 0 <$ pro $a_1 = a_2$ díky faktoru $\delta_{a_1a} - \delta_{a_2a}$
pro $a_1 \neq a_2$ díky lemmatu 2

Lemma 3: $[\hat{A},\hat{B}]=0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{P}_a,\hat{P}_b]=0 \quad \forall a,b$

DK: užití lemmatu 3a $\rightarrow [\hat{P}_a,\hat{B}]=0$ + opak. pro $\hat{A}\rightarrow\hat{B}$, $\hat{B}\rightarrow\hat{P}_a$

Důsledek: $\hat{P}_{ab} \equiv \hat{P}_a\hat{P}_b$ je projekční operátor

ověření $\hat{P}_{ab}^+ = \hat{P}_b^+\hat{P}_a^+ = \hat{P}_b\hat{P}_a = \hat{P}_{ab}$

$\hat{P}_{ab}^2 = \hat{P}_a\hat{P}_b\hat{P}_a\hat{P}_b = \hat{P}_a^2\hat{P}_b^2 = \hat{P}_{ab}$

Dokonce platí

VĚTA: samosdružené $\hat{A}, \hat{B}$: $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \iff [\hat{P}_a, \hat{P}_b] = 0$

pozn: ($\Rightarrow$) jsme dokázali výše

($\Leftarrow$) je triviálním důsl. spekt. rozkladu a linearity komutátoru : $[\hat{A}, \alpha_1 \hat{B}_1 + \alpha_2 \hat{B}_2] = \alpha_1 [\hat{A}, \hat{B}_1] + \alpha_2 [\hat{A}, \hat{B}_2]$

VĚTA: samosdružené operátory A, B mají společnou bazi vl. v.

$\iff [\hat{A}, \hat{B}] = 0$

DK: – stačí vzít bázi ve vl. podprostoru $\hat{P}_{ab} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$ pro $\lambda = 1$ a $\forall a, b$ pro něž je $\hat{P}_{ab} \neq 0$

→ tyto prostory jsou navz. ortogonální díky $\hat{P}_a \hat{P}_{a'} = \delta_{aa'} \hat{P}_a$ (podob. pro b) a navíc jejich direkt. součet je celý $\mathcal{H}$

neboť $$\hat{I} = \sum_{ab} \hat{P}_{ab} \quad \left(\overset{DK}{=} \hat{I} \cdot \hat{I} = \sum_a \hat{P}_a \cdot \sum_b \hat{P}_b \right)$$

pozn .. $\{(a, b)\}$ nemusí být kart. součin → vynecháváme $\hat{P}_{ab} = 0$

pozn: • společný spektr. rozklad
$$\hat{A} = \sum_{ab} a \hat{P}_{ab} \quad \Big(= \sum_a a \underbrace{\Big(\sum_b \hat{P}_{ab}\Big)}_{\hat{P}_a} \Big)$$
$$\hat{B} = \sum_{ab} b \hat{P}_{ab} \quad \rightarrow \text{podobně}$$

• funkce dvou proměnných $$f(\hat{A}, \hat{B}) = \sum_{ab} f(a, b) \hat{P}_{ab}$$

.. není jednoznačně definovaná pro nekomutující $\hat{A}, \hat{B}$

• dá se rozšířit na libovolný počet navzájem komut. oper.

$\hat{A}^{(1)}, \hat{A}^{(2)} \ldots \hat{A}^{(N)}$ navzájem komutují $\Rightarrow \exists$ spol. báze vl. v. $\forall \hat{A}^{(i)}$

Úplný systém komutujících operátorů (ÚSKO)

Def: Řekneme, že $\underbrace{\hat{A}^{(1)}, \ldots, \hat{A}^{(N)}}_{\text{(navzájem komutující)}}$ tvoří úsko pokud $\forall$ přípustná vlastních čísel $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}\}$ jednoznačně definuje spol. vlastní vektor $|\psi\rangle$ (až na fázi)

značení $|\psi\rangle \equiv |a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}\rangle$

pozn: • tj. spol. projektory $\hat{P}_{a^{(1)} \ldots a^{(N)}}$ už jsou jednodim. nebo 0

• sadu $\{\hat{A}^{(1)}, \ldots \hat{A}^{(N)}\}$ lze považovat za jeden operátor s nedegenerovaným spektrem vl. čísel .. N-tice $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}\} \equiv \bar{a}$

Věta: Pokud operátor $\hat{F}$ komutuje s $\forall\, A^{(1)}, \dots A^{(N)}$, které tvoří ÚSKO pak lze vyjádřit jako $\hat{F} = f(A^{(1)}, \dots, A^{(N)})$

DK: $\hat{F}, A^{(1)}, \dots A^{(N)}$ mají spol. sadu vl. v. ale to musí být $|a^{(1)} \dots a^{(N)}\rangle$ současně $\hat{F}|a^{(1)} \dots a^{(N)}\rangle = f\,|a^{(1)} \dots a^{(N)}\rangle$ … f je jediné pro $\forall$ sadu

Poznámka:

- značná část zbytku přednášky bude o hledání ÚSKO pro různé systémy a hledání jejich spektra a transf. mezi nimi.
- Pro odpovědi na fyzikální otázky potřebujeme, aby veličina která nás zajímá byla součástí ÚSKO, nebo jejich funkcí.
- Uvidíme, že po odpovědi na otázky o časovém vývoji je vhodné mít v ÚSKO Hamiltonián.

Pozn: DIREKTNÍ SOUČET PROSTORŮ

ve vektorech:

$$\psi = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \begin{matrix} \}a_1 \\ \\ \}a_m \end{matrix}$$

rozklad $I = \sum_a P_a \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{H} = \bigoplus_a \mathcal{H}_a$

… rozklad do navz. ortogon. podprostorů

podobně lze skládat:

def: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)}$ je LVP daný $\{ (|\psi^{(1)}\rangle, |\psi^{(2)}\rangle),\ |\psi^{(1)}\rangle \in \mathcal{H}^{(1)},\ |\psi^{(2)}\rangle \in \mathcal{H}^{(2)} \}$

s operacemi:

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle = (|\psi^{(1)}\rangle + |\phi^{(1)}\rangle, |\psi^{(2)}\rangle + |\phi^{(2)}\rangle)$$

$$\alpha|\psi\rangle = (\alpha|\psi^{(1)}\rangle, \alpha|\psi^{(2)}\rangle)$$

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle_{\mathcal{H}^{(1)}} + \langle\phi^{(2)}|\psi^{(2)}\rangle_{\mathcal{H}^{(2)}}$$

tj v konečné dimenzích:

$$|\psi^{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ \vdots \\ f_{d_1}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad |\psi^{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} f_1^{(2)} \\ \vdots \\ f_{d_2}^{(2)} \end{pmatrix} \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ \vdots \\ f_{d_1}^{(1)} \\ f_1^{(2)} \\ \vdots \\ f_{d_2}^{(2)} \end{pmatrix}$$

dimenze

tj $\mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)}$ je prostor jehož bází (ortonormální) je sjednocení bází $\mathcal{H}^{(1)}$ a $\mathcal{H}^{(2)}$

Příklad: $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$; $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}$

$I = \sum_{ab} P_{ab}$ … $\mathcal{H} = \bigoplus_a \bigoplus_b \mathcal{H}_{ab}$

fyzikálně: .. přidávání dalších hodnot pozorovatelné

PŘ: Kvantové tečky: $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}\{|A\rangle, |B\rangle\}$
poloha elektronu je $|A\rangle$ nebo $|B\rangle$

$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{L}\{|C\rangle, |D\rangle\}$
poloha elektronu je $|C\rangle$ nebo $|D\rangle$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{L}\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle, |D\rangle\}$$

DIREKTNÍ SOUČIN PROSTORŮ (někdy též tenzorový)

- důležitá operace .. skládání dvou kvantových systémů respektive přidávání stupňů volnosti
- prostor jehož bází je kartézský součin bází

Def: nechť $\mathcal{H}^{(1)}$ ... báze $\{|\phi_i^{(1)}\rangle\}_{i=1}^{d_1}$ .. podob. $\mathcal{H}^{(2)}$

pak def: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ je prostor s bází $\{|\phi_i^{(1)}\rangle|\phi_j^{(2)}\rangle\}_{i=1}^{d_1}\,{}_{j=1}^{d_2}$

tj. prostor s dimenzí $d = d_1 \cdot d_2$ (izomorfní maticím $d_1 \times d_2$)

tj. obecný vektor $|\psi\rangle = \sum_{ij} \psi_{ij} |\phi_i\rangle|\phi_j\rangle$ .. někdy se vynechává horní index .. automat 1. vekt $\mathcal{H}^{(1)}$

+ součet a násobení číslem definovaný přirozeně (distrib. zákon)

- pozn: zkrácený zápis $|\phi_i^{(1)}\rangle|\phi_j^{(2)}\rangle \equiv |\phi_i^{(1)}\rangle \otimes |\phi_j^{(2)}\rangle \equiv |\phi_i^{(1)}\phi_j^{(2)}\rangle$

- skalární součin $\langle\phi^{(1)}\phi^{(2)}|\psi^{(1)}\psi^{(2)}\rangle = \langle\phi^{(1)}|\psi^{(1)}\rangle_{\mathcal{H}^{(1)}} \langle\phi^{(2)}|\psi^{(2)}\rangle_{\mathcal{H}^{(2)}}$

speciálně báze: $\langle\phi_i\phi_j|\phi_{i'}\phi_{j'}\rangle = \langle\phi_i|\phi_{i'}\rangle\langle\phi_j|\phi_{j'}\rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'}$

- faktorizované vektory: $|\psi^{(1)}\rangle = \sum_i f_i^{(1)} |\phi_i^{(1)}\rangle$; $|\psi^{(2)}\rangle = \sum_j f_j^{(2)} |\phi_j^{(2)}\rangle$

→ distrib. zákon $|\psi^{(1)}\psi^{(2)}\rangle \equiv |\psi^{(1)}\rangle|\psi^{(2)}\rangle \equiv |\psi^{(1)}\rangle \otimes |\psi^{(2)}\rangle = \sum_{ij} f_i^{(1)} f_j^{(2)} |\phi_i\phi_j\rangle$

- entanglement: ne každý stav je možno napsat ↑
- možno zobecnit na více prostorů $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(3)}$

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}^{(i)}$$

- OPERÁTORY na $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$: obecně $\hat{A} \otimes \hat{B}\, |\phi\rangle|\psi\rangle = \hat{A}|\phi\rangle \otimes \hat{B}|\psi\rangle$

operátor $\hat{A}$ na $\mathcal{H}^{(1)}$ ... rozšíření na $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ ... $\hat{A} \to \hat{A} \otimes \hat{I}$

podobně $\hat{B}$ na $\mathcal{H}^{(2)}$ $\to \hat{I} \otimes \hat{B}$

ČASTO: ÚSKO NA $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ budován z ÚSKO na $\mathcal{H}^{(1)}$ a ÚSKO NA $\mathcal{H}^{(2)}$

PŘÍKLADY:

A) MATEMATICKÉ

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ ... 1D vektory $|\psi\rangle = \alpha|e_1\rangle$ $\qquad \mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}$
  - $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'$ (izomorfní $\mathbb{C}^2$) ... báze $\{|e_1\rangle, |e_1'\rangle\}$ ... 2 komp ... $\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{pmatrix}$
  - $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ (izomorfní $\mathbb{C}$) ... báze $\{|e_1\rangle|e_1'\rangle\}$ .. 1 vektor
- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$
  - $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'$ $(\equiv \mathbb{C}^4)$
  - $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ $(\equiv \mathbb{C}^4)$

  } ale jiná struktura → $\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}\begin{matrix}1'\\2'\end{matrix}\end{array}$, $\begin{pmatrix}\ \\ \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}\begin{matrix}11'\\12'\\21'\\22'\end{matrix}$

- Obecně: $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \equiv \mathbb{C}^{n+m}$
  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \equiv \mathbb{C}^{n\times m}$ ← izomorfní prostoru matic, ale v QM píšeme do sloupce

B) FYZIKÁLNÍ:

- jedna částice v kvantové trojtečce 

  $\mathcal{H}^{(D)} = \mathcal{L}\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ $(\equiv \mathbb{C}^3)$

  $|\psi\rangle = \sum_d \alpha_d |d\rangle \qquad d = 1,2,3 \qquad \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$

- dvě částice v trojtečce:

  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(D)} \otimes \mathcal{H}^{(D)} = \mathcal{L}\{|11\rangle, |12\rangle, |13\rangle, |21\rangle, \dots, |33\rangle\}$ $(\equiv \mathbb{C}^9)$

  $|\psi\rangle = \sum_{d_1 d_2} \psi_{d_1,d_2} |d_1 d_2\rangle \qquad |d_1 d_2\rangle \equiv |d_1\rangle \otimes |d_2\rangle$
  → částice 1 v $|d_1\rangle$; částice 2 v $|d_2\rangle$

pozn: komplikace .. nerozlišitelné částice → později

- částice se spinem $\frac{1}{2}$: $\mathcal{H}^{(S)} = \mathcal{L}\{|+\rangle, |-\rangle\} \equiv \mathbb{C}^2$
- částice se spinem $\frac{1}{2}$ v trojtečce: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(D)} \otimes \mathcal{H}^{(S)}$ $(\equiv \mathbb{C}^6)$

  $|\psi\rangle = \sum_{ds} \psi_{ds} |ds\rangle$; $\quad |ds\rangle \equiv \underbrace{|d\rangle}_{=1,2,3} \otimes \underbrace{|s\rangle}_{=+,-}$ ← částice v místě d se spinem s

→ na cvičení též pozorovatelné, 2 částice se spinem

př: Entanglement např. $|\psi\rangle = |1+\rangle + |2-\rangle$ nelze faktorizovat jako $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\sigma\rangle$

DALŠÍ PŘ NA CVIČENÍ