III. Formalismus kvantové teorie 2

- případ spojitého spektra
- pár poznámek k úvodu do funkcionální analýzy

PŘ 1: částice v 1D ... bezstrukturní

Experiment .. měření polohy x:

$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = \mathcal{L}\{|x\rangle;\ x \in \mathbb{R}\}$

OBECNÝ VEKTOR: $\quad |\psi\rangle = \sum_x \psi_x |x\rangle \longrightarrow |\psi\rangle = \int \psi(x)\, |x\rangle\, dx$

SKALÁRNÍ SOUČIN: $\quad \langle\phi|\psi\rangle = \sum_x \phi_x^* \psi_x \longrightarrow \langle\phi|\psi\rangle = \int \phi(x)^* \psi(x)\, dx$

NORMOVÁNÍ: $\quad |\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}$ ... lze jen $\int |\psi(x)|^2 dx < \infty$

$\rightarrow$ požadujeme $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \equiv \{\psi(x) : \int |\psi(x)|^2 dx < \infty\}$

def skoro všude na $\mathbb{R}$

OPERÁTOR: $\quad \hat{x} = \sum_x x P_x \longrightarrow \hat{x} = \int x\, |x\rangle\langle x|\, dx$

~~[illegible]~~: PŘ 2: (polo)nekonečný řetízek kvantových teček (atomů)

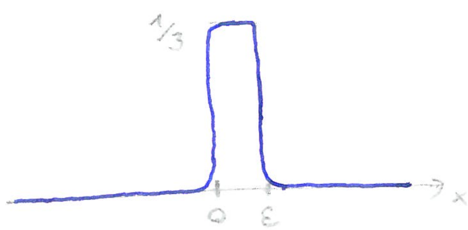
$\mathcal{H} = \mathcal{L}\{|n\rangle;\ n \in \mathbb{Z}\}$ ... $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$

.. normalizovatelnost $\quad \|\psi\|^2 = \sum_n |\psi_n|^2 < \infty$ ... prostor $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$

zpátky k příkladu 1:

~~[illegible]~~ pravděpodobnost nalezení částice v místě x $\sim |\psi_x|^2$

vlastní stavy operátoru $\hat{x}$ na $L^2(\mathbb{R})$



Diracova δ-funkce

můžeme chápat jako limitu $\varepsilon \to 0$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \chi_{\langle 0,\varepsilon\rangle}(x)$$

vlastnosti: $\quad \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0\ ; \quad \int \delta(x)\, dx = 1\ ; \quad \int \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$

$\rightarrow$ vlastní funkce operátoru $\hat{x}$ $\quad \psi_{x_0} = x_0 \psi_{x_0}$ ... $\psi_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)$

JEDNODUCHÝ NÁHLED ... Dirac

$\psi(x) \rightarrow$ sloupcový vektor s spojitým indexem $\begin{pmatrix} \vdots \\ \psi(x_0) \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots x_0 \qquad \delta(x - x_0) \cdots \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \infty \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots x_0$

jako konečně-dim $\mathcal{H}$ jen $\sum_n \rightarrow \int dx$

jemný ÚVOD DO POKROČILÝCH MAT. METOD QM

Reed & Simon : Methods of modern mathematical physics.

cca 1600 stran

I. Functional analysis II Fourier Analysis | Self-Adjointness

III. Scattering Theory IV Analysis of Operators

motto k úvodní kapitole: "The biginner shold not be discouraged if he finds that he does not have the prerequisities for reading the prerequisities."

Hilbertův prostor (ket vektory, stavy)

Def: LVP $\mathcal{H}$ nazveme Hilbertovým prostorem, pokud

$\forall$ Cauchyovská posloupnost vektorů z $\mathcal{H}$ má limitu v $\mathcal{H}$ (ÚPLNOST)

Pozn: $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská pokud:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K : \forall m, n > K : \|\psi_m - \psi_n\| < \varepsilon$$

Pozn: úplnost normovaného prostoru $\rightarrow$ Banachův prostor

v Hilbertovi : $\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ norma induk. skal. součinem

Pozn: Def. limity řekneme $\psi_n \rightarrow \psi$ pokud $\|\psi_n - \psi\| \rightarrow 0$

Separabilita $\mathcal{H}$

Def: $\mathcal{H}$ nazveme separabilní $\Leftrightarrow \exists$ spočetná hustá podmnožina

$\Leftrightarrow \exists$ spočetná ON báze

PŘ: (Prostory)

- prostor ℓ^2 $\equiv$ prostor posl $\psi \equiv \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\sum|\psi_n|^2 < \infty$

  skalární součin $\langle\phi|\psi\rangle \equiv \sum_m \phi_m^* \psi_m$

- prostor $L^2(a,b)$; $(a,b) \subset \mathbb{R}$ .. může být neomezený

  $\rightarrow$ fce $\psi(x)$ na (a,b) : $\int|\psi|^2 dx < \infty$

  skalární součin $\langle\phi|\psi\rangle \equiv \int \phi^*(x)\psi(x)\,dx$

- Banachův prostor $L^p(a,b)$: $\int|\psi|^p dx < \infty$ .. L^2 je spec. př.

PŘ (Báze)

- v prostoru ℓ^2 je kanon. báze: $\{1,0,0,\dots\} \equiv |\phi_1\rangle$, $\{0,1,0,\dots\} \equiv |\phi_2\rangle$, $\vdots$

- v prostoru $L^2(0,L)$ .. Fourierovská báze $|\phi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2ik\pi x/L}$ $k = \dots,-1,0,1,\dots$

  nebo reálná $|\phi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}, \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2\pi x}{L}, \dots$

$\forall \psi \in L^2(0,L)$: $|\psi\rangle = \sum_n f_n|\phi_n\rangle$ .. reprezentace $|\psi\rangle \Leftrightarrow \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\rightarrow \forall$ Separabilní $\mathcal{H}$ je izomorfní ℓ^2 lin operátory .. "matice"

Duální prostor (bra vektory, spoj. lin. fcionály)

Lineární funkcionály: $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

norma: $\|F\| = \sup \dfrac{\|F(|\psi\rangle)\|}{\|\psi\|}$ ... tj $\|F(\psi)\| \le \|\psi\| \cdot \|F\|$

Lineární fcionály: omezenost $\Leftrightarrow$ spojitost v bodě $\Leftrightarrow$ spojitost na $\mathcal{H}$

Rieszova věta o reprezentaci:

$\forall F \in \mathcal{H}^*$ ($\equiv$ prostor $\forall$ spoj. lin. fcionálů) $\exists! |\phi\rangle \in \mathcal{H} : F(\psi) = \langle \phi | \psi \rangle$

navíc: $\|F\|_{\mathcal{H}^*} = \|\phi\|_{\mathcal{H}}$

tj izomorfizmus: $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^*$

pozn: $\uparrow$ lze DK díky úplnosti a $\exists$ skalár. součinu

– nefunguje v L^p prostorech: $(L^p)^* \equiv L^q$ kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Diracova δ-funkce

jako limita $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \delta_\varepsilon(x)$ ... není def. v $\mathcal{H}$

DK: – jako bodová konvergence: $\delta = 0$ skoro všude tj $\int \delta = 0$

– jako lim v $\mathcal{H}$ ... není Cauchyovská posl.

podrobněji: $\delta_n \equiv \delta_{\varepsilon = \frac{1}{n}}(x)$

$\int 1^2 = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$

platí $\|\delta_n - \delta_{2n}\| = \sqrt{n} \to \infty$

δ-fce jako lin. fcionál: $F_\varepsilon[\psi] = \int \delta_\varepsilon(x)\, \psi(x)\, dx$

.. není spojitý na $\mathcal{H}$ $\to$ nedefinuje spoj. fcionál v lim $\varepsilon \to 0$

PŘ: posloupnost $\phi_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{-nx}} \xrightarrow{n \to \infty} \Theta(x)$

přitom $F_\varepsilon[\phi_n] \to \frac{1}{2}$ ($\varepsilon \to 0$, fixní n)

ale $F_\varepsilon[\phi_\infty] = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

Problém $\to$ příliš velký def. obor. $F_\varepsilon[\psi]$ je spojitý fcionál na prostoru spojitých funkcí

Def: δ jako spojitý lin. funkcionál na $\psi \in \mathcal{H}$; ψ spojité

$$F_\delta[\psi] \equiv \int \delta(x)\, \psi(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{\equiv} \psi(0)$$

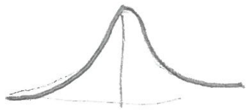
podobně $\delta(x - x_0)$ ... $F_{\delta_{x_0}}[\psi] \equiv \int \delta(x - x_0)\, \psi(x)\, dx = \psi(x_0)$

QM-I-22

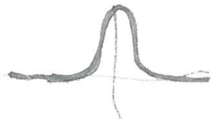
ODBOČKA – VZOREČKY PRO δ-funkci

δ-limity:

- $\delta_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \delta(x)$



- $\delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \delta(x)$

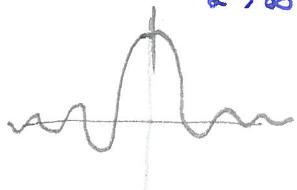


základ F.T.:

- $\int e^{ikx}\,dk$ přesněji $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx}\,dk = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{ix} = \frac{2\sin\alpha x}{x} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 2\pi\delta(x)$

tj.

- $\delta_\alpha(x) = \frac{\sin\alpha x}{\pi x} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \delta(x)$



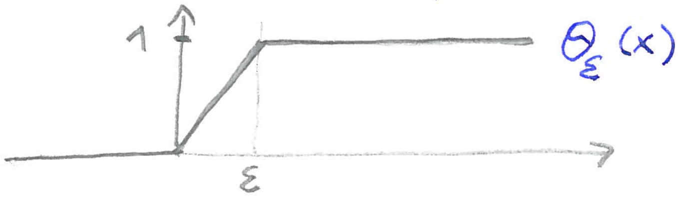
tj. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}\,dk = \delta(x)}$ δ je F.T. funkce $f(x)=1$

Další užitečné vztahy:

- $\delta(x) = \theta'(x)$ ... lze chápat z $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta(y)\,dy$

nebo jako limitu:

$\delta_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\langle 0,\varepsilon\rangle} = \theta_\varepsilon'(x)$



- $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$ ... ze subst. v $\int\delta(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int\delta(y)\,dy$
- $\delta(f(x)) = \sum_{x_k}\frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}$ kde x_k kořeny $f(x_k)=0$
- $\delta(-x) = \delta(x)$