Cvičení 4: Kvantový řetízek.

Motivace: Vyzkoušet si postup aplikace základních axiomů kvantové teorie na příkladě se spojitým spektrem.

Úloha 1: Jednoduchý řetízek

V minulých cvičeních jsme se setkali s kvantovými tečkami. Představte si nyní nekonečně dlouhý řetízek rovnoměrně rozmístěných kvantových teček. Částice se může vyskytovat v některé z nich, což popíšeme stavovým prostorem $\mathcal{H} = l^2$, s bází $\{|n\rangle, n \in \mathcal{Z}\}$. Jednoduchý hamiltonián, který respektuje symetrii tohoto systému lze napsat jako

$$H_0 = \sum_n \epsilon_0 |n\rangle\langle n| - t \sum_n \{|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\}$$

Pro tento systém:

1. Najděte vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu $H_0|E\rangle = E|E\rangle$.
2. Najděte správnou normalizační konstantu tak, aby platilo $\langle E|E'\rangle = \delta(E - E')$.
3. Zamyslete se nad tím, jaká je přesně množina vlastních vektorů, tj. "kolik" jich je a zda jsou některá vlasní čísla degenerovaná a kolikrát.
4. Ověřte relaci úplnosti $\sum_E |E\rangle\langle E| = I$

Nápověda: vlastní vektory hledejte ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle.$$

Předpokládejte, že tyto vlnové funkce musí být omezené, když $n \to \pm\infty$. Pro nalezení normalizační konstanty použijte vyjádření Diracovy delta-funkce jako limity:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta(x)$$

Úloha 2: Pološetízek

Zamyslete se nad otázkami z předchozího cvičení pro pološetízek, tj. v bázi budou jen vektory $|n\rangle$ pro $n = 1, 2, 3, ...$ Vlnovou funkci hledejte v podobném tvaru jako v předchozí úloze. Pro danou energii existují dvě řešení a odříznutí půlky řetízku lze dosáhnout okrajovou podmínkou $\langle 0|\psi\rangle = 0$, která určí konstanty v této lineární kombinaci.

Úloha 3: Řetízek s poruchou

Uvažujte stejnou úlohu jako 1, ale s hamiltoniánem

$$H = H_0 + v|0\rangle\langle 0|.$$

Při jakých hodnotách v přibude ke spojitému spektru jeden diskrétní stav? Vlnovou funkci hledejte ve stejném tvaru jako v předchozích úlohách, tj. jako lineární kombinaci dvou řešení pro danou energii, která bude mít jiné koeficienty pro $n > 0$ a pro $n < 0$. Modifikaci hamiltoniánu lze zahrnout napojováním řešení na kvantové tečce $|0\rangle$. Pozor: netriviální diskrétní stav dostanete pro energii mimo povolený pás energie z přechozích dvou úloh.

Měření:

Pro úlohy výše:

- Jakou hodnotu energie mohu naměřit pro systém připravený ve stavu $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ (najděte hustotu pravděpodobnosti v závislosti na hodnotě E).
- Jaká je střední hodnota energie v tomto stavu?
- Jaká je variance ΔE měření energie v tomto stavu?
- Pro úlohu 3: jaká je pravděpodobnost, že částici nalezneme v diskrétním stavu?

Pozn: Na cvičení jsme stihli jen úlohu 1. Pro zajímavost uvádím i ostatní úlohy.