Cvičení 5: Hrátky s komutačními relacemi.

Motivace: Odvodit některá základní pravidla a identity pro práci s komutátory.

Úloha 1

Nechť A, B, C jsou lineární operátory na Hilbertově prostoru:

- Dokažte že platí $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
- Podobně najděte vyjádření $[A, BC]$ pomocí jednoduchých komutátorů.
- Pokud $[A, B] = 0$ pak $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Dokažte.
- Rozmyslete si, že předchozí identita neplatí pokud $[A, B] \neq 0$.
- Dokažte Jacobiho identitu [[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0.

Úloha 2

Nechť navíc operátory A i B komutují s $[A, B]$ a nechť $f(x)$ je funkce, pak

- $[A, B^n] = nB^n[A, B]$
- $[A^n, B] = nA^n[A, B]$
- $[A, f(B)] = [A, B]f'(B)$
- $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$

Dokažte.

Úloha 3

Uvažujte operátor násobení nezávislou proměnnou $\hat{Q}\psi(x) = x\psi(x)$ na $L^2(\mathbb{R})$ a operátor derivace $\hat{P}\psi(x) = -i\hbar\psi'(x)$. Najděte komutátor $[\hat{X}, \hat{P}]$.

Úloha 4

Nyní uvažujeme operátory na $L^2(\mathbb{R}^3)$. Pokud $[\hat{Q}_\alpha, \hat{P}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$ pak operátor

$$\hat{J}_\alpha \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{Q}_\alpha\hat{P}_\beta$$

(je použita Einsteinova sumační konvence) splňuje komutační relace

$$[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta] = i\hbar\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma.$$

Dokažte.

Nápověda: využijte identitu $\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma}\varepsilon_{\alpha_2\beta_2\gamma} = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\beta_1\alpha_2}$