Cvičení 6: Generátory grupy rotací.

Motivace: Odvodit si některé vztahy pro Pauliho matice. Najít explicitně reprezentace rotací výpočtem exponenciály matice generátorů.

Úloha 1

Doplnění z minula: Nechť operátory A i B komutují s $[A, B]$, pak platí Glauberova identita: $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$. Dokažte.
Nápověda:

- Najděte derivaci funkce $F(t) = e^{At} e^{Bt}$ a s použitím výsledků minulého cvičení ukažte, že $F'(t) = (A + B + t[A, B])\, F(t)$
- Ověřte, že jednoznačné řešení této diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $F(0) = I$ je $F(t) = \exp\left\{(A + B)t + \frac{1}{2}[A, B]t^2\right\}$
- Využijte tohoto výsledku k důkazu Glauberovy identity.

Úloha 2

Najděte komutátor $[\sigma_\alpha, \sigma_\beta]$ a antikomutátor $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\}$ dvou Pauliho matic.

Úloha 3

S využitím předchozího cvičení najděte druhou mocninu a inverzi Pauliho matice σ_α

Úloha 4

Najděte operátor $U(\phi) = \exp\left(-\frac{i}{2}\phi\sigma_x\right)$

- Taylorovým rozvojem,
- spektrálním rozkladem

a ověřte jak působí tento operátor na stavy $|y : \pm\rangle$, $|z : \pm\rangle$, pokud zvolíme $\phi = \pi/2$.

Úloha 5

Ověřte, že rotační matice $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$, $R_z(\phi)$ pro vektory ve 3D lze získat pomocí maticové exponenciály z generátorů:

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$