Cvičení 8: Potenciálové jámy.

Úloha 1: Nekonečně hluboká jáma

Najděte energie a vlnové funkce stacionárních stavů částice hmotnosti m v nekonečně hluboké potenciálové jámě. Předpokládejte, že potenciál $V(x) = 0$ na intervalu $x \in \langle -a, a \rangle$ a $V = \infty$ všude jinde.

Dodatečné úlohy na rozmyšlení doma: Jak by se lišilo řešení, pokud posuneme jámu o a do intervalu $x \in \langle 0, 2a \rangle$? Umíte najít řešení rovnou použitím operátoru translace?

Úloha 2: Delta-jáma

Tentýž úkol, ale pro potenciál $\lambda\delta(x)$. Jaké musí být λ, aby existoval vázaný stav? Připravíme částici ve stavu

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta\sqrt{2\pi}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\Delta^2}\right\}.$$

Jaká je pravděpodobnost, že nám z jámy uteče?

Nápověda: Funkce $\psi(x)$ je již správně normovaná. Zatím jsme moc neprobírali časový vývoj. Formulujte druhou otázku jako otázku na měření energie.

Úloha 3: Obecná pravoúhlá jáma

Tentokrát máme potenciál $V(x) = -V_0 X_{\langle -a,a \rangle}(x)$, kde $X_I(x)$ je charakteristická funkce intervalu (1 na tomto intervalu, 0 jinde).

1. Najděte podmínku, kterou musí splňovat energie vázaných stavů.
2. Najděte podmínku pro existenci jednoho, dvou, tří vázaných stavů.
3. Z obecného řešení se pokuste zkonstruovat řešení úloh 1 a 2 jako vhodné limity.
4. Napište podmínku ($A \gg B$), za níž lze popisovat jámu v jedné z těchto limit.
5. Rozmyslete jak se bude lišit řešení přímým napojováním a použitím matic Wronskiánu.

Úloha 4: Pro rychlíky

Jaká je podmínka existence alespoň jednoho vázaného stavu v potenciálu

$$V(x) = V_0 X_{\langle -a,a \rangle}(x) - \lambda\delta(x),$$

kde V_0 a λ jsou kladná čísla. Pokuste se sami zvolit nejrychlejší cestu k cíli (přímé napojování, napojování logaritmické derivace, formulace pomocí matice Wronskiánu).