Úloha 5: Rotace lineární molekuly.

Termín odevzdání: 15. prosince

Orientace lineární molekuly je popsána směrovým vektorem $\vec{n} = (x, y, z)$. V kvantové mechanice vezmeme jako stavový prostor $\mathcal{H} = L^2(S)$ prostor kvadraticky integrovatelných funkcí $\psi(x, y, z)$ na jednotkové sféře $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Operátor momentu hybnosti molekuly je definován stejně jako orbitální moment hybnosti bezstrukturní částice. Hamiltonův operátor pro rotace molekuly je

$$\hat{H} = \hat{L}^2/2I, \tag{1}$$

kde $I > 0$ je moment setrvačnosti molekuly. Předpokládejte, že molekula je připravena ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi(x, y, z) = \left[\sqrt{5}(x - y) + i\right]^2. \tag{2}$$

1. Nalezněte rozklad funkce $\psi(x, y, z)$ do sférických harmonik (4 body).
2. Zjistěte jaké hodnoty projekce hybnosti $\hat{L}_z$ molekuly na osu z můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností (3 body).
3. Zjistěte v jakých časech je pravděpodobnost nalézt molekulu orientovanou do směru osy z maximální? Existují časy, kdy je tato pravděpodobnost nulová? (3 body)

Nápověda - tabulka sférických harmonik:

$$
\begin{array}{ll}
Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} & Y_{2\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x \pm iy)^2 \\
Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy) & Y_{2\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}z(x \pm iy) \\
Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z & Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3z^2 - 1)
\end{array}
$$