Zápočtová písemka z kvantové mechaniky I

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
Řetízek tří částic se spinem 1/2 je připraven ve stavu $|\psi\rangle = |{+}{-}{+}\rangle - |{-}{+}{-}\rangle$, kde $|s_1 s_2 s_3\rangle$ znamená stav v němž má i-tá částice z-složku spinového momentu hybnosti rovnu $s_i \frac{\hbar}{2}$. Na systému provedeme měření složky spinu s_x první částice a naměříme hodnotu $+\frac{\hbar}{2}$. Potom provedeme měření s_x druhé částice a naměříme opět hodnotu $+\frac{\hbar}{2}$. Při třetím měření budeme měřit s_x třetí částice. Jaké výsledky a s jakou pravděpodobností můžeme nalézt?

Úloha 2(10 bodů)
Částice v centrálním Coulombickém poli je připravena v prvním excitovaném stavu ($n = 2$) se z-tovou složkou orbitálního momentu hybnosti rovnou 0. Jaká je dimenzionalita prostoru všech stavů, které vyhovují tomuto popisu? Najděte mezi nimi stav s největší pravděpodobností výskytu v horní polorovině $z > 0$.

Úloha 3(10 bodů)
Orientace dvouatomové molekuly v čase $t = 0$ je popsána vlnovou funkcí $\psi(\vec{n}) \equiv \psi(\theta, \phi) = x^2 + y^2 = \sin^2\theta$. Časový vývoj je určen operátorem hamiltoniánu $\hat{H} = \hat{L}^2/2I$, kde $\hat{L}^2$ je operátor kvadrátu orbitálního momentu hybnosti a $I > 0$ je konstanta (moment setrvačnosti). V jakém čase t je nejmenší pravděpodobnost nalézt molekulu orientovanou do směru $\vec{n} = \vec{e}_x \equiv (1, 0, 0)$ (neboli $x = 1$, $y = z = 0$), tj. $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$.

Úloha 4(10 bodů)
Uvažujme lineární harmonický oscilátor ve 2D s hamiltoniánem $\hat{H} = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 - \partial_y^2 + x^2 + y^2)$ a s momentem hybnosti $\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ připravený ve stavu $|\psi\rangle = |20\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger)^2|00\rangle$. Najděte $\langle\hat{L}\rangle$. Jaké hodnoty L je možno naměřit a s jakou pravděpodobností? Jaká je matice (operátor) hustoty po tomto měření, pokud neznáme jeho výsledky?
Poznámka: Úloha je zadána v jednotkách v nichž $m = \omega = \hbar = 1$.

Úloha 5(10 bodů)
Na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ popisujícím Q-bit, s bází $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ definujeme operátor hodnoty Q-bitu $\hat{n} = |1\rangle\langle 1|$. V systému dvou Q-bitů, se stavovým prostorem $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ definujeme operátor $\hat{N} = \hat{n} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{n}$. Zjistěte, jak tento operátor působí na bázové vektory $|n_1 n_2\rangle$, kde $n_i \in 0, 1$ je hodnota i-tého Q-bitu. Předpokládejme, že Hamiltonián systému dvou Q-bitů je dán vzorcem $\hat{H} = \epsilon\hat{N} - \beta\hat{V}$, kde $\hat{V} = |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|$ je operátor přeskoku informace mezi Q-bity a ϵ, β jsou reálné konstanty. Dokažte, že $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$. Předpokládejte, že v čase $t = 0$ je systém ve stavu $|00\rangle + |10\rangle$. Jaká je pravděpodobnost nalézt v čase $t > 0$ hodnotu druhého Q-bitu $n_2 = 1$?

V úloze 2 si pro rychlý výpočet integrálů vzpomeňte na Γ-funkci:

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty \left(\frac{x}{a}\right)^n e^{-x/a}\mathrm{d}x = \int_0^\infty t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$$