Zápočtová písemka z kvantové mechaniky I

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
Uvažujme bezstrukturní částici v jedné dimenzi s operátorem polohy $\hat{x}$ a operátorem hybnosti $\hat{p}$, které splňují kanonickou komutační relaci $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Pro dané reálné číslo a definujeme operátor traslace $\hat{T}_a = \exp(-ia\hat{p}/\hbar)$. Najděte komutátor $[\hat{x}, \hat{T}_a]$. Předpokládejte, že $|x\rangle$ je vlastní vektor operátoru $\hat{x}$ odpovídající vlastní hodnotě x. Ukažte, že $\hat{T}_a|x\rangle$ je rovněž vlastním vektorem operátoru $\hat{x}$ a zjistěte jakému vlastnímu číslu odpovídá. Je $\hat{T}_a$ normálním operátorem? Jaké je jeho spektrum?

Úloha 2(10 bodů)
Harmonický oscilátor s hmotností m a vlastní úhlovou frekvencí ω je připraven v čase $t = 0$ ve stavu popsaném vlnovou funkcí $\psi(x) = (x_0 + \sqrt{2}x)\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2\}$, kde jako obvykle $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. V čase $t > 0$ vypneme potenciálové pole, takže systém se dále vyvíjí jako volná částice s hmotností m. Jaká je pravděpodobnost, že částice poletí doprava (tj. ve směru $p > 0$)?

Úloha 3(10 bodů)
Částice se spinem 1/2 a hmotností m je zachycena v potenciálové pasti, která je dobře aproximována harmonickým oscilátorem s periodou T a to ve stavu $|\psi\rangle = |0\rangle|+\rangle + |1\rangle|-\rangle$, kde báze $|n\rangle|s_z\rangle$ popisuje prostorové a spinové stupně volnosti (společný stav hamiltoniánu harmonického oscilátoru a operátoru z-tové složky spinu) ve standardní fázové konvenci. V tomto stavu provedeme měření x-ové složky spinového momentu hybnosti a naměříme její největší hodnotu. Jaká je bezprostředně po provedení tohoto měření hustota pravděpodobnosti nalézt částici v daném místě x?

Úloha 4(10 bodů)
Bezstrukturní částice s hmotností m je zachycena v potenciálu aproximovaném nekonečně hlubokou jámou ($V(x) = \infty$ pro $|x| > a$) s plochým dnem ($V(x) = 0$ pro $|x| < a$), kde $2a$ je šířka jámy. Částici připravíme v čase $t = 0$ ve stavu, který je lineární kombinací základního a prvního excitovaného stavu s největší možnou střední hodnotou operátoru polohy $\hat{x}$. Jaká je střední hodnota tohoto operátoru v pozdějším čase $t > 0$.

Úloha 5(10 bodů)
Uvažujte kvantovou trojtečku ve stavu popsaném kanonickou maticí hustoty $\hat{\rho} = \frac{1}{z}\exp(-\beta\hat{H})$, kde $\hat{H} = -\alpha(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 2|)$ dále $\alpha, \beta = 1/kT$ jsou nezáporné konstanty a číslo z je dáno normalizační podmínkou $\mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$. Vyjádřete $\hat{\rho}$ jako matici v bázi $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Jak vypadá tato matice v limitě nulové teploty $\beta \to \infty$? Jde v této limitě o čistý či smíšený stav? Najděte pravděpodobnost s jakou systém připravený ve stavu popsaném maticí hustoty $\hat{\rho}$ (pro obecné β) můžeme systém najít ve stavu $|n\rangle$ pro dané $n = 1, 2$ nebo 3.

Mohou se hodit:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n! \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos(x)\sin(2x)dx = \frac{8}{9}$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$