Nabitá částice v magnetickém poli

1) Opakování klasické mechaniky:

- Newton. pohyb. rovnice: $m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

  kde • Lorentzova síla: $\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

- Elektromagnetické pole je popsáno potenciály:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

kalibrační invariance: $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, $\phi \to \phi' = \phi - \partial_t \chi$

nemění pohyby částic

- Lagrangeův formalismus:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}, t) \equiv \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\,\phi(x,t) + q\,\vec{v}\cdot\vec{A}(x,t)$$

→ generuje Lorenz. sílu:

Lagrange-rovnice: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\alpha}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha}$

$$m \frac{dv_\alpha}{dt} = -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}\right) + q\left(v_\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - v_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$$

Lorentzova síla: $F_\alpha = q\left(-\dfrac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} + \partial_t A_\alpha\right) + q\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, v_\beta\, \varepsilon_{\gamma\mu\nu} \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\mu\nu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$

$$= q\left[-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha} + \partial_t A_\alpha\right) + v_\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - v_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right]$$

- Hamiltonův formalismus

  - kanonická hybnost $\vec{p} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}$

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{v}\cdot\vec{p} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(x)\right)^2 + q\,\phi(x,t)$$

pozn: $\vec{p}$ není pozorovatelná (závisí na kalibraci!)

ale stále intimně souvisí s transl. invariancí:

$$\frac{d}{dt}(p_\alpha) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\alpha}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\alpha} = 0 \text{ pro transl. invar. ve směru } \vec{e}_\alpha$$

2) kvantově mechanický popis

$$\boxed{\hat{H} = \frac{(\hat{p}_\alpha - q\hat{A}_\alpha)(\hat{p}_\alpha - q\hat{A}_\alpha)}{2m} + q\hat{\phi}}$$

$\hat{\vec{x}} \equiv \{\hat{x}_\alpha\}_{\alpha=1}^{3} \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

kde operátory: $\hat{x}_\alpha$ -- násobení nezáv. prom. (v souřad. repr.)

kanon. souř. a kanon. hybn. $\hat{p}_\alpha \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ (generátor posunutí)

$\rightarrow$ splňují kanonické komutační relace $[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$

$\hat{\phi} \equiv \phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ klas. potenc. funkce

$\hat{A}_\alpha \equiv A_\alpha(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

Další důležité pozorovatelné:

- operátor rychlosti:

obecně operátor změny veličiny $\dot{\hat{A}} \equiv \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]$

zde: $\hat{V}_\alpha \equiv \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{x}_\alpha] = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}[(\hat{p}_\alpha - q\hat{A}_\alpha)(\hat{p}_\alpha - q\hat{A}_\alpha), \hat{x}_\alpha]$

$$\boxed{\hat{V}_\alpha = \frac{1}{m}(\hat{p}_\alpha - q\hat{A}_\alpha)}$$

(stejné jako klas. vzorec na předch. str.)

tj: $\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}m\hat{V}_\alpha\hat{V}_\alpha + q\hat{\phi}}$

důležité komut. relace:

- 1) $[\hat{x}_\alpha, \hat{V}_\beta] = \frac{i\hbar}{m}\delta_{\alpha\beta}$ ... zjevné

2) $[\hat{V}_\alpha, \hat{V}_\beta] = \frac{i\hbar q}{m^2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{B}_\gamma$ $\left(\frac{i\hbar}{m}\omega_c\right)$

Dk druhé relace: .. stačí $[V_x, V_y]$ + cyklická záměna

$$[V_x, V_y] = \frac{1}{m^2}[p_x - qA_x, p_y - qA_y] = \frac{-q}{m^2}\left([p_x, A_y] + [A_x, p_y]\right) = -\frac{qi\hbar}{m^2}\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)}_{-B_z\ \cdots\ \nabla\times A}$$

- operátor Lorentzovy síly:

Heisenbergova pohyb rovnice (připomínám $\hat{V}_\alpha^{(H)} \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{V}_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$):

$$m\frac{dV_\alpha^{(H)}}{dt} = m\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{V}_\alpha^{(H)}] = m\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\underbrace{[\hat{V}_\beta^{(H)}\hat{V}_\beta^{(H)}, \hat{V}_\alpha^{(H)}]}_{V_\beta[V_\beta, V_\alpha] + [V_\beta, V_\alpha]V_\beta} + m\frac{i}{\hbar}q\underbrace{[\hat{\phi}^{(H)}, \hat{V}_\alpha^{(H)}]}_{\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}}$$

pozn: komutátory v Heisenberg repr. stejné!

$$= m\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\frac{i\hbar q}{m^2}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}\left(\hat{V}_\beta^{(H)}\hat{B}_\gamma^{(H)} + \hat{B}_\gamma^{(H)}\hat{V}_\beta^{(H)}\right) - q\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_\alpha}$$

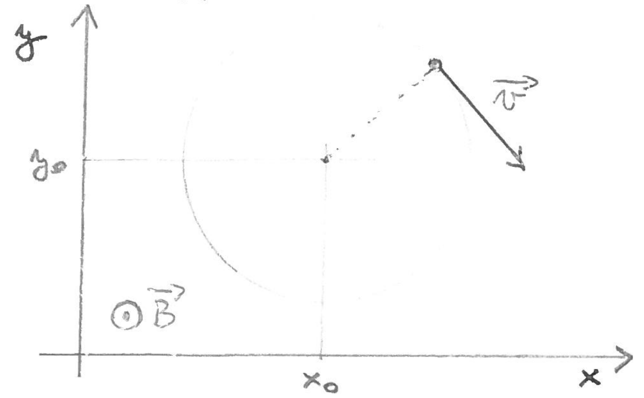
tj $$m\frac{dV_\alpha^{(H)}}{dt} = \boxed{q\frac{1}{2}\left(\hat{\vec{V}}^{(H)} \times \hat{\vec{B}}^{(H)} - \hat{\vec{B}}^{(H)} \times \hat{\vec{V}}^{(H)}\right) + q\hat{\vec{E}}^{(H)} \equiv \vec{F}^{(H)}}$$

jako klasický vzorec až na pořadí operátorů

3) Pohyb částice v homogenním MG poli (Landauovy hladiny)

volba souřadnic: ... $\vec{B} = B\vec{e}_z$

opak. klas. mechaniky:



.. klasický pohyb $\vec{F} = qvB = m\frac{v^2}{r}$

→ "cyklotronová freq": $\boxed{\omega_c \equiv \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}}$

$$x = x_0 + r\cos(\omega_c t + \delta)$$

(*): $$y = y_0 - r\sin(\omega_c t + \delta)$$

$$v_x = -\omega_c r\sin(\omega_c t + \delta)$$

$$v_y = -\omega_c r\cos(\omega_c t + \delta)$$

kvantové řešení:

... volba kalibrace: $\vec{A} = (-yB, 0, 0)$ ... $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ $\quad \nabla\times\vec{A} = \vec{B}$

- algebraické řešení:

$$\hat{H} = \boxed{\tfrac{1}{2}m\left(\hat{V}_x^2 + \hat{V}_y^2\right)} + \tfrac{1}{2}m\hat{V}_z^2 \equiv \hat{H}_{xy} + \hat{H}_z$$

platí: $$\left.\begin{aligned}[\hat{V}_y, \hat{V}_z] &= \frac{i\hbar q}{m^2}B_x = 0 \\ [\hat{V}_z, \hat{V}_x] &= \frac{i\hbar q}{m^2}B_y = 0\end{aligned}\right\} \to [\hat{H}_{xy}, \hat{H}_z] = 0$$

→ separabilita

$E = E_{xy} + E_z$:

— $\hat{H}_z = \frac{1}{2}m\hat{V}_z^2$ kde $\hat{V}_z \equiv \frac{1}{m}\hat{P}_z$ ... volná částice

— $\hat{H}_{xy} = \frac{1}{2}m\frac{|q|B}{m^2}\left(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2\right) = \frac{1}{2}\omega_c\left(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2\right)$

kde $\hat{Q} \equiv \frac{m}{\sqrt{|q|B}}\hat{V}_x \qquad \hat{P} \equiv \frac{m}{\sqrt{|q|B}}\hat{V}_y$

přitom: $[\hat{Q}, \hat{P}] = \frac{m^2}{|q|B}[\hat{V}_x, \hat{V}_y] = \frac{m^2}{|q|B}\frac{i\hbar q}{m^2}B = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{znaménko} \\ \text{náboje } \frac{q}{|q|}}}{\pm} i\hbar$

→ komut. relace jako x, p ; nebo p, x

anihil. oper: $\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$ resp $\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ)$

⇒ jako LHO $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar$ ... $\hat{N} \equiv \hat{a}^+\hat{a}$ ... násob. $\hbar$

→ $E_{xy} = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$

závěr: spektrum $\quad E_n(v_z, \alpha) = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}mv_z^2$;

kde $n = 0, 1, 2, \dots$; $v_z \in \langle 0, \infty)$ a α ... dodateč. degenerace později

- Řešení v souřadnic. reprez. (Landau)
Zeitschrift für Phys. 64 (1930) 629

v naší kalibraci: $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[(\hat{p}_x + \hat{y} q B)^2 + p_y^2 + p_z^2\right]$

kde $\hat{p}_\alpha \equiv -i\hbar\partial_\alpha$ tj $[\hat{p}_x, \hat{H}] = [\hat{p}_z, \hat{H}] = 0$ $[\hat{p}_y, \hat{H}] \neq 0$

tj ÚSKO: $\{\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{H}\}$

... společné vl. vektory: $\psi(x,y,z) = e^{i(k_x \cdot x + k_z \cdot z)}\phi(y)$

stac. SR: $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{i\hbar q}{m} B y \partial_x \psi + \frac{q^2 B^2 y^2}{2m}\psi - E\psi = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(y) + \underbrace{\frac{\hbar q B k_x}{m}}_{-\frac{m}{2}\omega_c^2 2 y y_0} y\,\phi(y) + \Big[\underbrace{\frac{q^2B^2}{2m}y^2}_{\frac{m}{2}\omega_c^2 y^2} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_z^2)}_{\frac{m}{2}\omega_c^2 y_0^2} - E\Big]\phi(y) = 0$$

$\boxed{y_0 = -\frac{\hbar k_x}{q B}}$

$\Rightarrow$ $-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(y) + \frac{m}{2}\omega_c^2 (y - y_0)^2 = \epsilon\phi$ ... $\boxed{\epsilon \equiv E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}}$

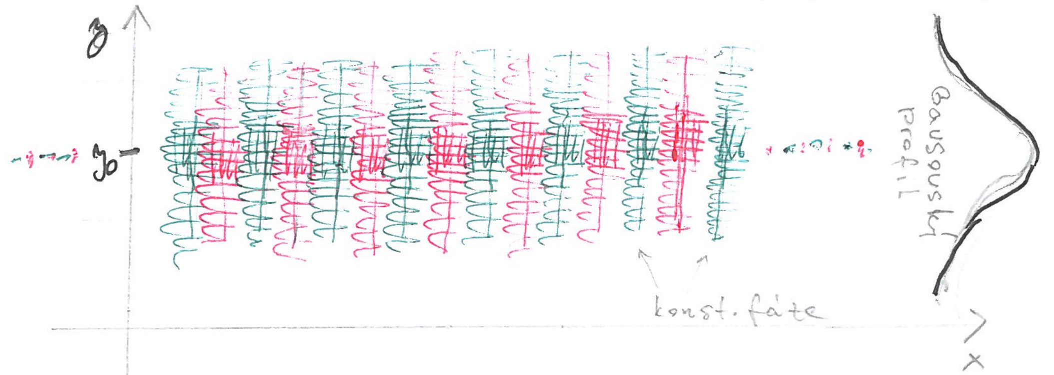
posunutý LHO: řešení: $\psi(x,y,z) = N e^{ik_x x + ik_z z} H_n(\alpha(y-y_0)) e^{-\frac{1}{2}(\alpha(y-y_0))^2}$

$\alpha \equiv \frac{1}{x_0} = \sqrt{\frac{m|\omega_c|}{\hbar}} \equiv \sqrt{\frac{|q|B}{\hbar}}$ $\equiv \langle x,y,z | k_x, k_z, n\rangle$

z kapitoly o LHO

spektrum $\boxed{E_n(k_x,k_z) = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$
$k_x, k_z \in \langle 0, \infty)$

Obrázek řešení:
($n=0$)



interpretace:

další pozorovatelné: $\boxed{\hat{X}_0 \equiv \hat{X} + \frac{\hat{V}_y}{\omega_c}}$ $\boxed{\hat{Y}_0 \equiv \hat{Y} - \frac{\hat{V}_x}{\omega_c}}$ ... souřadnice středu trajektorie

poloměr trajektorie $\boxed{\hat{r}^2 \equiv (\hat{x} - \hat{x}_0)^2 + (\hat{y} - \hat{y}_0)^2 = \frac{1}{\omega_c^2}(\hat{V}_x^2 + \hat{V}_y^2)}$

tj $\hat{H}_{xy} \equiv \frac{1}{2} m \omega_c^2 \hat{r}^2$ ... tj $\hat{r}$ je integrál pohybu

a navíc $r = \frac{1}{\alpha}\sqrt{(2n+1)}$ $\left[= \sqrt{\frac{2E_{xy}}{m\omega_c^2}}\right]$

oscilátorové x_0

→ tj n určuje poloměr trajektorie

souřadnice středu: $[\hat{H}, \hat{x}_0] = [H, \hat{Y}_0] = 0$

.. integrály pohybu

DK: $[\hat{H}_{xy}, \hat{x}_0] = [\frac{1}{2}m(\hat{V}_x^2 + \hat{V}_y^2), \hat{x} + \frac{1}{\omega_c}\hat{V}_y] = \frac{1}{2}m\underbrace{[\hat{V}_x^2, x]}_{-\frac{2i\hbar}{m}\hat{V}_x} + \frac{m}{2\omega_c}\underbrace{[\hat{V}_x^2, \hat{V}_y]}_{2\frac{i\hbar q}{m^2}B\hat{V}_x} = 0$

$[\hat{H}_{xy}, \hat{Y}_0] = [\frac{1}{2}m(\hat{V}_x^2 + \hat{V}_y^2), \hat{y} - \frac{1}{\omega_c}\hat{V}_x] = -\frac{1}{2}m\frac{2i\hbar}{m}V_y + \frac{m}{2\omega_c}V_y\frac{2i\hbar q B}{m^2} = 0$

ale $[\hat{X}_0, \hat{Y}_0] = -\frac{i\hbar}{m\omega_c} \equiv -i\alpha^{-2}$ ... nekompatibilní proměnné

→ relace neurčitosti $\Delta x_0 \cdot \Delta y_0 \geq \frac{\hbar}{2m\omega_c}$

DK: $[\hat{X}_0, \hat{Y}_0] = [\hat{x} + \frac{1}{\omega_c}\hat{V}_y, \hat{y} - \frac{1}{\omega_c}\hat{V}_x] = -\frac{1}{\omega_c}[\hat{x}, \hat{V}_x] + \frac{1}{\omega_c}[\hat{V}_y, \hat{y}] - \frac{1}{\omega_c^2}[\hat{V}_y, \hat{V}_x]$

$= -\frac{\hbar i}{m\omega_c} - \frac{\hbar i}{m\omega_c} + \frac{1}{\omega_c^2}\frac{i\hbar}{m}\omega_c$ ✓

PŘITOM:

v souřadnicové reprezentaci:

$\hat{y}_0 = \hat{y} - \frac{\hat{v}_x}{\omega_c} = \hat{y} - \frac{1}{\omega_c m}(\hat{p}_x - q\underbrace{A_x}_{-yB}) = \frac{i\hbar}{m\omega_c}\partial_x$

tj nalezený stav $\hat{y}_0|\psi\rangle = -\frac{\hbar k_x}{m\omega_c}|\psi\rangle = -\frac{\hbar k_x}{qB}|\psi\rangle = y_0|\psi\rangle$

→ je vlastním vektorem operátoru $\hat{y}_0$ .. $\Delta y_0 = 0$ .. + rel. neurč.

⇒ nekonečná neurčitost $\hat{x}_0$

pozn: $\hat{y}_0 = \frac{-\hat{p}_x}{qB}$ ...!? $\hat{p}_x$ není hybnost, ale y-složka souř. středu!

pozn k degeneraci: Položení do boxu:

+ period. okr. podm. → $k_x = \frac{2\pi n_x}{D_x}$ $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

+ řešení je téměř nenulové pokud $y_0 \in (0, D_y)$ tj jen $n_x = 0, -1, -2, \ldots n_M$

tj. max $y_0 = \frac{-\hbar k_x}{m\omega_c} = \frac{\hbar}{qB}\frac{2\pi n_M}{D_x} \leq D_y$ tj $n_M \simeq \frac{D_x D_y}{2\pi} \cdot \frac{qB}{\hbar} = \frac{D_x D_y}{2\pi\alpha^{-2}}$ *

kde $\alpha^{-2} \equiv \frac{\hbar}{m\omega_c}$ ... (x_0^2 .. typ rozměr LHO) (dříve v pozn)

interpretace: $2\pi\alpha^{-2}$ ... plocha jednoho stavu

4) Kalibrační transformace

Tvrzení: záměna
$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$$
$$\phi \to \phi' = \phi - \partial_t \chi$$
$$\psi \to \psi' = e^{\frac{i}{\hbar} q\chi}\psi$$
nenaruší platnost (tSR)

pozn: v klas mech stačí první dvě ... nezmění sílu

DK: Lemma: $(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}')\psi' = e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi$

DK -- jen dosazení z def ... dodat člen z $\vec{A}'$ "sežere" $[\vec{\nabla}, e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}]$

DK tvrzení: $\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}')^2\psi' + q\phi'\psi' - i\hbar\partial_t\psi'$

$$= \frac{1}{2m}e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2\psi + \left[q\phi\psi - q\partial_t\chi\,\psi - i\hbar\tfrac{i}{\hbar}q\partial_t\chi\,\psi\right]e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}$$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}\left\{\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2\psi + q\phi\psi\right\} \quad \checkmark$$

Další důsledky lemmatu:

- $\langle\psi|\hat{\vec{V}}|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{1}{m}(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})|\psi\rangle = \langle\psi'|\hat{\vec{V}}'|\psi'\rangle$

  $\to$ kalibrační invariance $\langle\vec{V}\rangle$

  (neplatí pro $\langle\vec{p}\rangle$!)

  ... dokonce platí, že spektrum $\vec{V}$ je kalib. invar!

- tok hustoty pravděpodobnosti plyne z tSR: (odvodit nacv.)

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) - \frac{q}{m}\vec{A}|\psi|^2$$
$$= \frac{1}{2m}\left[(\psi^*\hat{p}\psi - \psi\hat{p}\psi^*) - 2q\hat{A}(\psi)^2\right]$$
$$= \frac{1}{m}\operatorname{Re}\{\psi^*(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})\psi\} \quad \text{.. kalibračně invariant.}$$

5) Aharonov – Bohm efekt

(Phys. Rev. 115 (1959) 485 ; Physics Today ; Sept. 2009, 38)

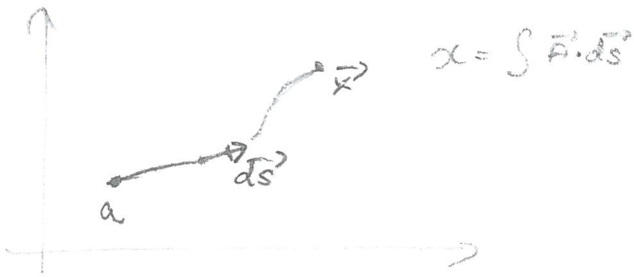
A) volná částice ... řešení $\psi_0(x,t)$

↳ tj $\vec{E}=0$; $\vec{B}=0$ ... lze volit $\vec{A}=0$

kalibrační transformace $0=\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ... $\vec{A}=+\nabla\chi$ nové $(\vec{A}')$

→ v této kalibraci $\psi(x,t)=e^{\frac{i}{\hbar}q\chi}\,\psi_0(x,t)$

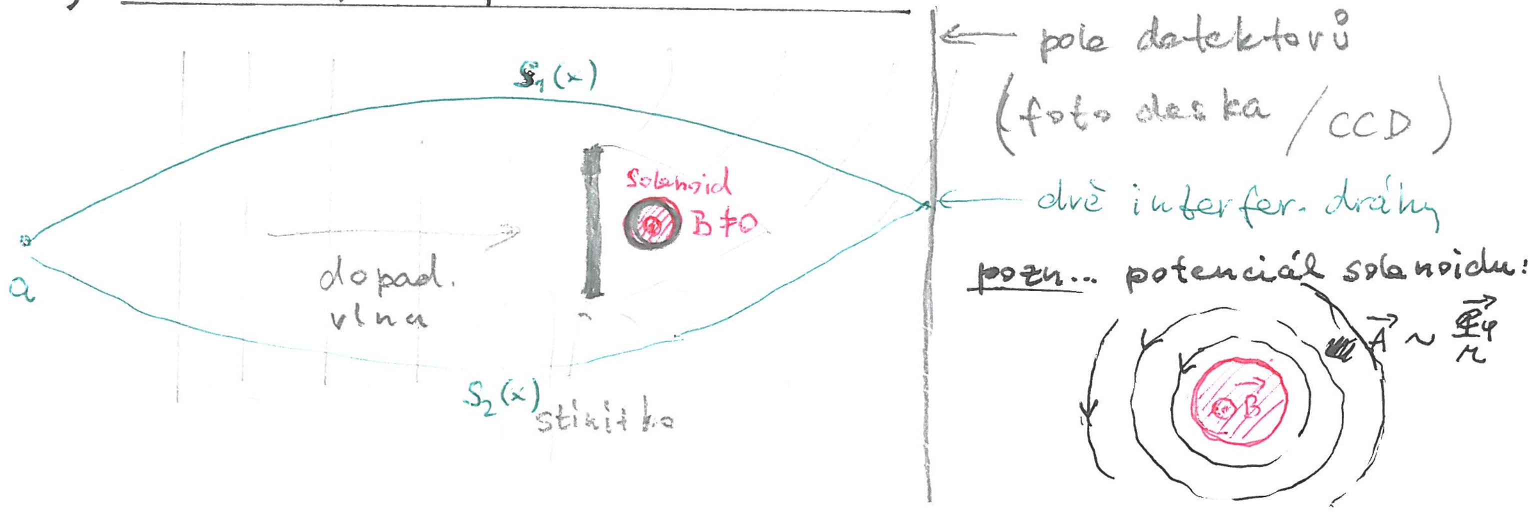
přitom $\chi(\vec{x})=\int_a^{\vec{x}}\vec{A}\cdot d\vec{s}$



$\nabla\times\vec{A}=0$ ⇒ χ nezávisí na dráze

(v jednoduše souvislé obl.)

B) stále 0 pole $\vec{B}$, ale na oblasti "sdílrou":



interferuje $\chi_1=\int_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{s}$ a $\chi_2=\int_{S_2}\vec{A}\cdot d\vec{s}$

podle Stokes. věty: $\chi_1-\chi_2=\oint_{+S_1\cup(-S_2)}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\oint\operatorname{rot}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\Phi$

Magnetický tok

→ interference dána faktorem $\exp\{\frac{i}{\hbar}q\Phi\}$

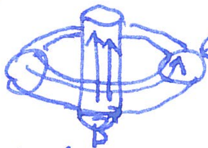
Fyzikální důsledky:

.. pole je sice nenulové, ale v oblasti kam částice nemůže

– buď $\vec{B}$ působí nelokálně nebo

$\vec{A}$ má reálný fyz. význam (ale jen kalibr. invar. veličiny z něj odvozené)

Pozn: AB-efekt pro vás slovy:



← oblast výskytu částice

řešení v cylindrických souřadnicích:

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \quad \ldots \quad \psi = \psi(\rho, z)\, e^{im\varphi}$$

↳ $\frac{m^2}{\rho^2}$ v ef. potenciálu

s MG polem lze volit $A_\varphi = \frac{\phi}{2\pi\rho}$ $\quad A_\rho = A_z = 0$ .. kde ϕ je mg tok

→ vede k záměně $m \to m - F$ v eff. potenciálu, kde

$$F = \frac{\phi q}{\hbar c} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Zeemanův jev ... atom v MG poli (omezíme se na slabé)

předp.: $H = \dfrac{\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2M} + W(r)$ ← centrální potenciál (pro H coulomb. γ/r) obecnější .. později HF approx.

... atom v konstantním MG p + opět předp. $\vec{B} = B\vec{e}_z$

volím $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}$ ... pak splňuje:

1) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{B}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{x}}_{3}) - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{x}}_{\left(\begin{smallmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{smallmatrix}\right)\equiv I}) = \vec{B}$

2) $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{x}) = -\frac{1}{2}\vec{B}\cdot(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{x}}_{0}) = 0$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{e}{2Mc}\underbrace{(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p})}_{= 2\vec{A}\cdot\vec{p} \text{ v kalibraci } \operatorname{div}\vec{A} = 0} + \frac{e^2A^2}{2Mc^2} + W(r)$$

zanedbáme pro slabá pole .. $\sim \left(\frac{B}{c}\right)^2$ je OK díky tomu že ψ lokaliz. pro malé r je tak [illegible]

faktor $\vec{A}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{x})\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot(\vec{x}\times\vec{p}) = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{L}$ ← moment hybnosti

tj $\quad H \simeq \dfrac{\hat{p}^2}{2M} + \dfrac{e}{2Mc}\vec{B}\cdot\vec{L} + W(r) = H_a + \dfrac{e}{2Mc}\vec{B}\cdot\vec{L}$

speciálně pro atom vodíku:

$$\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \quad \ldots \quad H_a \psi_{n\ell m} = E_n \psi_{n\ell m}$$

$$L^2 \psi_{n\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1)\, \psi_{n\ell m}$$

$$L_z \psi_{n\ell m} = \hbar m\, \psi_{n\ell m}$$

kde $E_n = -\frac{1 Ry}{n^2}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

nezáv. na m

nyní $H \psi_{n\ell m} = \left(E_n + \frac{e\hbar B}{2m_e} m \right) \psi_{n\ell m}$

Zeemanův posun v MGP

... motivace pro označení m ... magnetické kvant. číslo

- v silných polích složitější. ale dá se řešit v lim $B \to \infty$
  v každém silném poli lze porovnat W s a poruchu (ale ne přímo)
- pro obecné pole není anal. řešení (píše Ballentine)
  ... myslím, že není pravda ... Cederbaum