III. Prostoročasové transformace
(změna souřadného systému)

motivace: - přechod do jiného souř. syst. (snažší počítání)
- invariance fyzikálních zákonů
- obecné důsledky prostoročas. symetrií
- odvození tvaru fyzik. zákonů (Galileiho invariance)
- lepší porozumění rotacím, význam momentu hybn. vektorové a tenzorové operátory
- aplikace teorie grup (ir.r.)

① O unitárních transformacích

přenesení systému a měřícího aparátu:

$\hat{A} = \sum_a a|\phi_a\rangle\langle\phi_a|$ $\qquad$ $\hat{A}' = \sum_a a|\phi'_a\rangle\langle\phi'_a|$

Věta (Wigner):
$\forall$ bijekce $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zachovávající $|\langle\phi|\psi\rangle|$ je reprezentována unitárním lineárním operátorem $|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ (nebo antiunitárním antilin.).

připomenutí:
UNITÁRNÍ OPERÁTOR: def U unitární $\Leftrightarrow U^+ = U^{-1}$

další vlastnosti:
- zobrazuje $\forall$ ON bázi $|\phi_a\rangle$ na ON bázi $|\phi'_a\rangle = U|\phi_a\rangle$
  tj. můžeme psát $\hat{U} = \sum_a |\phi'_a\rangle\langle\phi_a|$
- spektrum $\hat{U}$
  - jeho vlastní čísla jsou komplexní jednotky $u = e^{i\phi_u}$
  - je to normální operátor tj. vl. vektory tvoří ON bázi
  - spektr. rozkl.: $\hat{U} = \sum_u u\hat{P}_u = \sum_u e^{i\phi_u}\hat{P}_u = e^{i\hat{F}}$

  kde jsme definovali $\hat{F} = \sum_u \phi_u \hat{P}_u$ ... samosdr. $\hat{F}^+ = \hat{F}$

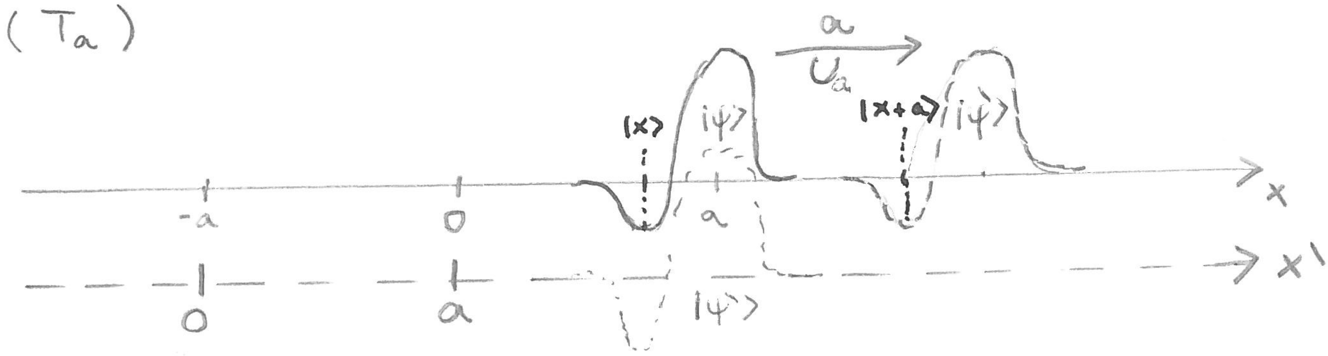
PŘ: Posunutí částice v 1D

báze $|x\rangle$ ... $\hat{U}(a)|x\rangle = |x+a\rangle$

$T_a x = x + a$
prvek G .. grupa transl.

$|\psi\rangle = \int \psi(x)|x\rangle dx$ tj $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = \int \psi(x)|x+a\rangle dx$
$= \int \psi'(x'-a)|x'\rangle dx'$

tj. translace reprezentována oper: $\hat{U}_a \psi(x) = \psi(x-a)$
(T_a)



dva pohledy na transformaci:
- AKTIVNÍ ... stavy $\psi'(x)$ jsou posunuty o $\vec{a}$
- PASIVNÍ ... $\psi'(x)$ je stejný stav v souř. systému posunutém o $-\vec{a}$

→ tj posunutí souř. syst. do a zprostředk. oper. $\hat{U}_{-a}$

Jiný zápis operátoru posunutí:

$$\psi'(x) = \psi(x-a) = \sum_n \frac{1}{n!}\psi^{(n)}(x)(-a)^n = \sum_n \frac{(-a)^n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \psi(x) \equiv \hat{U}\psi(x)$$

$$\text{tj} \quad \hat{U}_a = \exp\left\{-a\frac{d}{dx}\right\} = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}a\hat{p}\right\}$$

pozn: • důsl ... $[\hat{U}_a, \hat{p}] = 0$ ... translace nemění hybnost.

• více stupňů volnosti ... $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}^{(n)}$

$\hat{U} = \hat{U}^{(1)}\hat{U}^{(2)} \ldots \hat{U}^{(n)}$ .. komutují

.. pro spin. stupně volnosti $\hat{U} = \hat{I}$ .. netransformuje se

... prostorové .. nezávislé ..$(a_x, a_y, a_z) = \vec{a}$,
ale různé částice .. ∀ stejné posunutí

např: $\hat{U}_{\vec{a}}\psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) = \psi(\vec{r}_1 - \vec{a}, \ldots, \vec{r}_n - \vec{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}}\psi$

kde $\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}}^{(1)} + \ldots + \hat{\vec{p}}^{(n)} = -i\hbar(\nabla_{r_1} + \ldots + \nabla_{r_n})$
.. celková hybnost.

OBECNĚ:

každé transformaci τ systému (ať už fyzické - aktivní pohled nebo souřadnicové - pasivní pohled) odpovídá unitární operátor $U: \mathcal{H} \xrightarrow[\text{na}]{} \mathcal{H}$, tak že stavy se změní na $|\psi'\rangle = U_\tau |\psi\rangle$ a operátory odpovídající fyzikálním veličinám se změní na $\hat{A}' = U_\tau \hat{A} U_\tau^{-1}$, takže výsledky odpovídajících měření jsou stejné.

③ Spojité grupy transformací (Lie groups)

množina $\forall$ posunutí tvoří grupu (skládání zobrazení) podobně rotace, boost (přechod do pohybujícího se syst.)

OPAKOVÁNÍ:

grupa $G = \{\text{prvků } \tau\}$ s operací $\circ : G \times G \to G$;
tj $\forall \tau_1, \tau_2 : \exists \tau_3 = \tau_1 \circ \tau_2$

axiomy: asociativita, existence 1 a inverzního prvku

Reprezentace grupy: (působení grupy na $\mathcal{H}$)

zobrazení z G do množiny unit. operátorů na $\mathcal{H}$ zachovávající strukturu grupy .. tj $\hat{U}(\tau_1)\hat{U}(\tau_2) = \hat{U}(\tau_1 \circ \tau_2)$

Př: $G = \{T_a\}$ ... reprez ... $\hat{U}_a$

Liova grupa (G je navíc d-dimenz. dif. varieta)

prvky grupy lze očíslovat pomocí spoj. parametrů $\vec{s} = \{s_1, s_2 \dots, s_d\}$, tak že

$$\tau(\vec{s}_1) \circ \tau(\vec{s}_2) = \tau(\vec{s}_3) \quad \text{tj} \quad \vec{s}_3 = f(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$$

$$\text{a} \quad \tau(\vec{s}_1)^{-1} = \tau(\vec{s}_2) \qquad \vec{s}_2 = h(\vec{s}_1)$$

přičemž funkce f a h jsou C^∞.

Generátory pro konečnou grupu: .. množina prvků $g_1 \dots g_n$ tak, že $\forall$ prvek G mohu napsat jako jejich součiny.

PŘ: grupa rotací (roviny) o násobky $2\pi/N$ ... grupa C_N .. cyklická má jeden generátor ... rotace o $\frac{2\pi}{N}$ ... g

$\rightarrow \forall$ prvek $G = g^k$

zobecnění na spojité grupy:

generátory jsou infinitezimální transformace v okolí 1.

Věta (Stone):

Nechť $\hat U(s)$ je reprezentace 1 param. grupy $\tau(s)$

taková, že (a) $\hat U(s=0)=\hat I$,

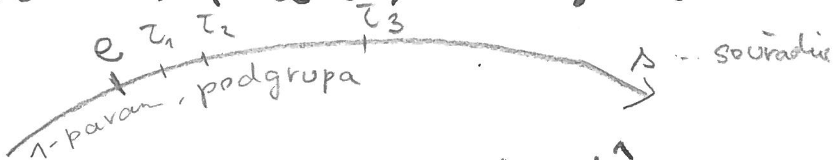
(b) $\hat U(s_1+s_2)=\hat U(s_1)\,\hat U(s_2)$.

Potom existuje samosdružený operátor $\hat G^+=\hat G$,

takový, že $\boxed{\hat U(s)=e^{i\hat G s}}$ (Generátor grupy)

pozn:

Dá se ukázat, že předpoklady (a) a (b) jsou BÚNO, neboť s je jen očíslování prvků grupy a (a) lze dosáhnout vhodným posunutím a (b) vhodným (nelineárním) škálováním.



Nástin DK:

- diferencovatelnost očíslování prvků $\Rightarrow$ $\hat U(s)=\hat I+\frac{d\hat U}{ds}\cdot s+O(s^2)$
- unitarita $\hat U\hat U^+=\left(\hat I+\frac{d\hat U}{ds}s\right)\left(\hat I+\frac{d\hat U^+}{ds}s\right)+O(s^2)$

$$=\hat I+\left[\frac{d\hat U}{ds}+\frac{d\hat U^+}{ds}\right]s+O(s^2)=\hat I$$

tj $\frac{d\hat U}{ds}+\frac{d\hat U^+}{ds}=0$ ... def $i\hat G\equiv\frac{dU}{ds}\Big|_{s=0}$ $\Rightarrow$ $\hat G^+=\hat G$

- derivací (b) podle s_2 v bodě $s_1=s$ a $s_2=0$:

$$\frac{d\hat U}{ds}(s)=\hat U(s)\,i\hat G \quad + \text{poč. podm. } \hat U(s=0)=\hat I \quad \text{(a)}$$

$\rightarrow$ jednoznačné řešení $\hat U(s)=e^{i\hat G s}$ c.b.d.

pozn:

jiný náhled ... jako generátor konečné grupy, ale limitní přechod ... (b) $\Rightarrow$ $\hat U(s)=\hat U\left(\frac{s}{n}\right)^n$ $n\in\mathbb{N}$

+ jako výše Taylor: $\hat U(\varepsilon)=\hat I+i\varepsilon\hat G+O(\varepsilon^2)$

tj $\hat U(s)=\lim_{n\to\infty}\left[\hat I+i\frac{s}{n}\hat G\right]^n=e^{is\hat G}$

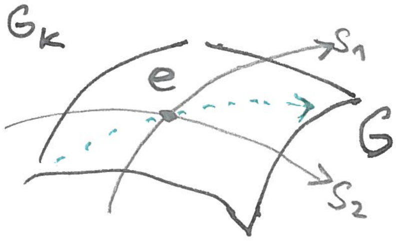
vzpomeňte z analýzy $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

③ Zobecnění na více param. grupu:

1-param. podgrupy ... např. v $\vec{s} = \{s_1, \dots, s_d\}$ měníme jen s_k

• → splňuje Stone → $\hat{U}_k(s) = e^{is\hat{G}_k}$

obecný směr $\hat{U}(\vec{s}) = \exp\{i\sum_k s_k \hat{G}_k\}$



PŘ: Grupa translací ve 3d ... $T_{\vec{a}}$

vektor posunutí $\vec{a}$ hraje roli $\vec{s} = \{a_x, a_y, a_z\}$

generátory $\hat{G}_x = -\frac{\hat{p}_x}{\hbar}$ $\quad\hat{G}_y = -\frac{\hat{p}_y}{\hbar}$ $\quad\hat{G}_z = -\frac{\hat{p}_z}{\hbar}$

pozn: Translace tvoří Abelovskou grupu $[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0$

a tedy $\hat{U}(\vec{a}) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}\} = e^{-\frac{i}{\hbar}a_x\hat{p}_x} e^{-\frac{i}{\hbar}a_y\hat{p}_y} e^{-\frac{i}{\hbar}a_z\hat{p}_z}$

ale obecně (pro nekomut. $[\hat{G}_\mu, \hat{G}_\nu] \neq 0$) rovnost neplatí

strukturní konstanty (Lie-) grupy .. komutátory generátorů

množina generátorů Lieovy grupy je uzavřená vůči operaci komutátoru, tj $\exists$ reálné konst. $C^\lambda_{\mu\nu}$:

$$\boxed{[\hat{G}_\nu, \hat{G}_\mu] = i\sum_\lambda C^\lambda_{\mu\nu}\hat{G}_\lambda} \quad \text{(Lieova algebra)}$$

strukturní konstanty

DK: vypočteme násl. výraz:

$$e^{i\varepsilon\hat{G}_\mu} e^{i\varepsilon\hat{G}_\nu} e^{-i\varepsilon\hat{G}_\mu} e^{-i\varepsilon\hat{G}_\nu} =$$

$$= [\hat{I} + i\varepsilon\hat{G}_\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\hat{G}_\mu^2][\hat{I} + i\varepsilon\hat{G}_\nu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\hat{G}_\nu^2][\hat{I} - i\varepsilon\hat{G}_\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\hat{G}_\mu^2][\hat{I} - i\varepsilon\hat{G}_\nu - \tfrac{\varepsilon^2}{2}\hat{G}_\nu^2] + O(\varepsilon^3)$$

$$= \hat{I} + i\varepsilon[\hat{G}_\mu + \hat{G}_\nu - \hat{G}_\mu - \hat{G}_\nu] + \varepsilon^2[-\hat{G}_\mu^2 - \hat{G}_\nu^2 + \hat{G}_\mu^2 + \hat{G}_\nu^2 - \hat{G}_\mu\hat{G}_\nu + \hat{G}_\mu\hat{G}_\nu + \hat{G}_\nu\hat{G}_\mu - \hat{G}_\mu\hat{G}_\nu]$$

$$= \hat{I} + \varepsilon^2[\hat{G}_\nu, \hat{G}_\mu] + O(\varepsilon^3) \qquad (*)$$

na druhé straně tento operátor $= U_\mu(\varepsilon)U_\nu(\varepsilon)U_\mu(-\varepsilon)U_\nu(-\varepsilon)$

reprezentuje prvek grupy $\tau_\mu(\varepsilon)\circ\tau_\nu(\varepsilon)\circ\tau_\mu(-\varepsilon)\circ\tau_\nu(-\varepsilon) = \tau_0$

a tento prvek lze napsat jako vykročení v grupě směrem

$\vec{s} = s\cdot(C^1_{\mu\nu}, C^2_{\mu\nu}, \dots, C^d_{\mu\nu})$ a jeho reprez. je

$U(\tau_0) = \exp\{is\sum_\lambda C^\lambda_{\mu\nu}\hat{G}_\lambda\}$ + srovn. Taylora s $(*)$ $\Rightarrow s = \varepsilon^2$ a relace k dokázání

④ Rotace v $\mathbb{R}^3$ .. grupa SO(3)

$G = \{$rotací 3D prostoru s operací skládání zobrazení$\}$

$\equiv \{$reálných matic 3×3 R; $\det R = 1$; $R^T R = R R^T = I\}$
s operací násobení matic

tyto matice jsou přímo prvky grupy ($R \equiv \tau$), ale současně tvoří (tzv. věrnou) reprezentaci ($R \equiv U$), která působí na prostoru $\mathbb{R}^3$. ... $\vec{r}\,' = R\vec{r}$ .. otočený bod prostoru

Generátory: (věrné reprezentace)

1-param. podgrupy:

$$\hat{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \simeq \hat{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} + O(\alpha^2) = e^{i\alpha \hat{G}_x} \simeq I + i\alpha\hat{G}_x + O(\alpha^2)$$

srovnáním $\longrightarrow$ $\hat{G}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

podobně $\hat{R}_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} = e^{i\alpha\hat{G}_y}$ $\quad \hat{G}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{R}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{i\alpha\hat{G}_z}$ $\quad \hat{G}_z = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

obecná rotace $\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) = \exp\{i\alpha\, \vec{n}\cdot\vec{G}\} \equiv \exp\{i\alpha \sum_m n_m \hat{G}_m\}$

Další reprezentace na $\mathcal{H}$

$\boxed{\text{PŘ}}$ **Bezstrukturní částice ve 3D** ... $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

báze v $\mathcal{H}$: $|\vec{r}\rangle$

grupa $G = SO(3) = \{R\}$ ... reprezentace na $\mathcal{H}$ ... $\hat{U} \equiv \hat{R}_R$

požadavek ... působení na bázi: $\hat{R}_R|\vec{r}\rangle = |R\vec{r}\rangle$

působení na obecný stav:

$$\hat{R}_R|\psi\rangle = \hat{R}\int d^3r\, \psi(\vec{r})|\vec{r}\rangle = \int d^3r\, \psi(\underbrace{\vec{r}}_{\vec{r} = R^{-1}\vec{r}\,'})|\underbrace{R\vec{r}}_{\vec{r}\,'}\rangle = \int d^3r'\, \psi(R^{-1}\vec{r}\,')|\vec{r}\,'\rangle$$

tj. působení SO(3) na $\mathcal{H}$: $\boxed{\hat{R}_R\,\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r})}$

poznámka: sférické souřadnice $(r,\theta,\varphi) \xrightarrow{R_z(\alpha)} (r,\theta,\varphi+\alpha)$

$$\Rightarrow \hat{R}_{R_z}\psi(r,\theta,\varphi) = \psi(R_z^{-1}(r,\theta,\varphi)) = \psi(r,\theta,\varphi-\alpha) = e^{-\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}}\cdot\psi(r,\theta,\varphi)$$

Taylor. rozvoj .. jako transl.

$\Rightarrow \hat{G}_z = -\hat{L}_z/\hbar$

Dalo by se provést pro ostatní složky ...

platí: $\boxed{\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha)\,\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}_{\vec{n}}(\alpha)\,\vec{r}) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\alpha\,\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}\}\,\psi(\vec{r})}$

Komutační relace generátorů obecné reprezentace rotací na $\mathcal{H}$

zjistíme jakému prvku grupy rotací odpovídá

$$R_y(\alpha)\,R_x(\alpha)\,R_y(-\alpha)\,R_x(-\alpha) = R_z(\alpha^2) \quad \text{pro } \underset{\overset{\parallel}{\varepsilon}}{\alpha} \to 0$$

přitom $R_\mu(\alpha) = e^{i\alpha G_\mu}$ tj

$$R_z(\alpha^2) = e^{i\alpha\hat{G}_y}\,e^{i\alpha G_x}\,e^{-i\alpha G_y}\,e^{-i\alpha G_x} =$$ (stejný postup jako na str 5)

$$= \left(\begin{matrix}\text{do 2. řádu}\\ \text{v } \alpha\end{matrix}\right) = \hat{I} - \varepsilon^2\,\underbrace{[\hat{G}_y, \hat{G}_x]} = \hat{I} - i\varepsilon^2 G_z = R_z(-\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3)$$

(*) $$\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&i\\0&-i&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&i\\0&-i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\+1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = i\,G_z$$

ZÁVĚR: a) Prvky rotační grupy splňují relaci:

(o) $$R_y(\alpha)\,R_x(\alpha)\,R_y(-\alpha)\,R_x(-\alpha) = R_z(-\varepsilon^2)$$ + cyklické verze

b) Přímým výpočtem pro generátory jsme zjistili (*): $[\hat{G}_x, \hat{G}_y] = -i\,\hat{G}_z$ + cyklické

což současně je infinitezimální verze (o)

c) Jakákoli reprezentace grupy rotací $\hat{R}_R$ musí rovněž splňovat relaci (o) a její generátory $\hat{G}$ tedy musí splňovat (*). V analogii s bezstrukt. částicí zavedeme obecně přeškálovaný generátor $\hat{J}_\mu \equiv -\hbar\,\hat{G}_\mu$

tj $\boxed{\hat{R}_\mu(\alpha) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\alpha\,\hat{J}_\mu\}}$ přičemž $\boxed{[\hat{J}_\mu, \hat{J}_\nu] = i\hbar\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\,\hat{J}_\lambda}$

! generátor rotací je mom. hybn. komutační relace mom. hybnosti

PŘ: Částice se spinem s ... operátor spin momentu $\hat{S}_\mu$

rotace kolem osy $\vec{n}$ o úhel α $\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha)\,\cancel{\psi} = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\alpha\,\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}\}$

na cvičení ukážeme, že pro spin 1/2; kde $\hat{S}_\mu = \frac{\hbar}{2}\sigma_\mu$ je

$$\hat{R}_{\vec{n}}(\alpha) = \exp\{-\frac{i}{2}\alpha\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\} = \cos\frac{\alpha}{2}\,\hat{I} - i\sin\frac{\alpha}{2}\,\hat{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n}$$

(5) Vztah rotací a translací

Obecná prostorová transformace v $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r}\,' = R\vec{r} + \vec{a} \quad = T_{\vec{a}}\, R\, \vec{r}$$

R .. rotace
$T_{\vec{a}}$ .. translace

- strukturní konstanty ($\leftrightarrow$ komutátory generátorů)

$$e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{P}_y}\, e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{J}_x}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{P}_y}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{J}_x} \simeq \hat{I} - \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}[P_y, J_x] \quad \text{... na } \mathcal{H}$$

$\leftrightarrow$ v $\mathbb{R}^3$: $\quad T_y(-\varepsilon)\, R_x(-\varepsilon)\, T_y(\varepsilon)\, R_x(\varepsilon) \quad = T_z(-\varepsilon^2)$

$$\hookrightarrow \vec{r} \xrightarrow{R_x} R_x(\varepsilon)\vec{r} \xrightarrow{T_y(\varepsilon)} R_x(\varepsilon)\vec{r} + \varepsilon\vec{e}_y \xrightarrow{R_x(-\varepsilon)}$$

$$\rightarrow \underbrace{R_x(-\varepsilon)R_x(\varepsilon)}_{I}\vec{r} + \varepsilon R_x(-\varepsilon)\vec{e}_y \xrightarrow{T_y(-\varepsilon)} \vec{r} + \varepsilon R_x(-\varepsilon)\vec{e}_y - \varepsilon\vec{e}_y$$

$$= \vec{r} + \varepsilon\left(R_x(-\varepsilon) - I\right)\vec{e}_y = \vec{r} + \varepsilon \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon - 1 & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon - 1 \end{pmatrix}}_{\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{r} - \varepsilon^2 \vec{e}_z \quad \Rightarrow$$

tj. obecně v $\mathcal{H}$: $\quad \hat{I} - \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}[\hat{P}_y, \hat{J}_x] = I + \frac{\varepsilon^2}{\hbar} i \hat{P}_z$

neboli $\quad [\hat{J}_x, \hat{P}_y] = i\hbar \hat{P}_z \quad$ + cyklická obměna

tj. $\quad \boxed{[\hat{J}_\mu, \hat{P}_\nu] = i\hbar\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{P}_\lambda}$

.. brzy uvidíme, že toto je obecná vlastnost vektorových operátorů.

6 Translace v čase

- už víme z dřívějšího:

$$\hat{U}(\Delta t)\,|\psi(t)\rangle = |\psi(t+\Delta t)\rangle \qquad \hat{U}(\Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\Delta t}$$

- interpretace z hlediska teorie grup

.. translace v čase ≡ 1 param. podgrupa → ∃ generátor a ten nazveme $\hat{G} = -\frac{1}{\hbar}\hat{H}$ … Hamiltonián.

7 Galileovská transformace – boost

$$B_{\vec{v}}: \quad \vec{r} \to \vec{r} + \vec{v}t \qquad \dots \text{ v } \mathbb{R}^3 \quad (\text{klasická fyz.})$$

Pasivní interpretace .. přechod do souř. se shod. počátkem v t=0 a pohybující se rychlostí $-\vec{v}$

Aktivní interpretace + bodu dám rychlost $\vec{v}$, kterou se pohybuje

__působení na $\mathcal{H}$:__

… posunutí v hybnostech … v čase $t=0$:

$$\hat{B}_{\vec{v}}|\vec{p}\rangle = |\vec{p}+m\vec{v}\rangle \qquad \dots \text{ podobné jako posun v } \vec{r}, \text{ ale v p-reprezentaci}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B}_{\vec{v}}\,\psi(\vec{p}) = \psi(\vec{p}-m\vec{v}) = e^{-m\vec{v}\cdot\nabla_p}\,\psi(\vec{p})$$

připomenutí: .. $\vec{r} = i\hbar\nabla_p$

$$\text{tj} \quad \hat{B}_{\vec{v}} = e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}\cdot\vec{r}} \qquad \dots \hat{G}_\alpha = \frac{mX_\alpha}{\hbar}$$

ukazuje se, že pokud chceme, aby Schrödingerova rovnice byla invariantní vůči $\hat{B}_{\vec{v}}$ musíme přidat netriviální fázi pro $t>0$:

$$\dots \quad \hat{G}_\alpha = \frac{m r_\alpha - t p_\alpha}{\hbar}$$

přitom: (viz cvičení)

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}\,e^A e^B \qquad \text{pokud } [A,[A,B]]=0,\ [B,[A,B]]=0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B}_{\vec{v}}(t)\,\psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}v^2 t}\, e^{\frac{i}{\hbar}m\vec{v}\cdot\hat{\vec{r}}}\, \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot\hat{\vec{p}}t}}_{\text{translace}}\,\psi(\vec{r},t)$$

$$\boxed{\hat{B}_{\vec{v}}(t)\,\psi(\vec{r},t) = e^{\frac{i}{\hbar}\left(m\vec{v}\cdot\vec{r} - \frac{1}{2}mv^2 t\right)}\,\psi(\vec{r}-\vec{v}t,t)}$$

Galileovský boost. .. aktivní pohled

poznámky:

- podobně jako jsme našli komutátory $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$ se dají najít komutační relace $\forall$ generátorů $P_\alpha, J_\alpha, H, G_\alpha$
- z toho, že translace a rotace hýbou s polohovým vektorem $\vec{r}$ plynou komutační relace mezi $\hat{\vec{r}}$ a $\hat{\vec{P}}$ či $\hat{\vec{J}}$.
- dá se ukázat, že (až na unit. transf.) je jediným řešením těchto relací $\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla_r$; $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$
- pokud požadujeme, aby byla dynamika invariantní vůči Galilei transf. musí být $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + E_0 \hat{I}$
- pokud připustíme, že generátor $\hat{H}$ může být v růž. místech prostoru různý vyjde obecnější tvar:

$$\hat{H} = \frac{[\hat{\vec{p}} - \vec{A}(\hat{\vec{r}})]^2}{2m} + W(\hat{\vec{r}})$$

kde $\vec{A}(\vec{r})$ a $W(\vec{r})$ jsou libovolné fce, a m, E_0 konst.

Fyzikální interpretace: E_0 .. volba počátku E-osy
m .. hmotnost
W, A .. skalární a vektor. potenc