Skládání momentu hybnosti:

Opakování z minulého semestru:

Moment hybnosti ... libovolný operátor $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$
(vektorový) $i = x, y, z$

$\Rightarrow$ spektrum J^2, J_z ... spol. vl. vektory $|j, m, \alpha\rangle$

$$J^2 |j, m, \alpha\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m, \alpha\rangle$$
$$J_z |j, m, \alpha\rangle = m\hbar^2 |j, m, \alpha\rangle$$

$j =$ ~~...~~ $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ (nebo podmnožina)
$m = -j, -j+1, \dots, j$
($\forall j$; $2j+1$ hodnot → násobná degenerace)

přitom
$$J_+ |j, m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\, \hbar\, |j, m+1\rangle$$
$$J_- |j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\, \hbar\, |j, m-1\rangle$$

kde $J_\pm \equiv J_x \pm i J_y$

$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

příklady: spin $\frac{1}{2}$: $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

orbit. moment: $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{Q}} \times \hat{\vec{P}} = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$

skládání systémů: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ... $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$
(nebo lin. kombinace)

báze $|\phi_{mn}\rangle = |\phi_m\rangle_1 \otimes |\phi_n\rangle_2$

operátor $\hat{A}_1 \longrightarrow \hat{A}_1 \otimes \hat{I}$ $\quad \hat{A}_1 \otimes \hat{I}\left(|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle\right) = A_1|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$

částice se spinem $\frac{1}{2}$: ... báze $|\vec{Q}, s\rangle \equiv |x, y, z\rangle \otimes |\pm\rangle$ ... $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{R}^2$

vl. fce má dvě komponenty $\psi_\pm(x, y, z) \equiv \underbrace{\langle x, y, z| \otimes \langle \pm|}_{\in \mathcal{H}^*} \underbrace{\psi\rangle}_{\mathcal{H}}$

tj. $|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{Q}) \\ \psi_-(\vec{Q}) \end{pmatrix}$ ... dvoukomponentová vl. fce

celkový moment hybnosti $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \equiv \hat{\vec{L}} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{\vec{S}}$

tj. např. $J_z|\psi\rangle$ ... v souřad. reprez. $= -i\hbar\begin{pmatrix} y\partial_z \psi_+ - z\partial_y \psi_+ \\ y\partial_z \psi_- - z\partial_z \psi_- \end{pmatrix} + \frac{i\hbar}{2}\underbrace{\sigma_z \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}}$

v případě že H je sfér. sym. nezáv. na spinu
.. místo Q-reprezentace .. $\left.\begin{matrix} |n\,l\,m\rangle|+\rangle \\ |n\,l\,m\rangle|-\rangle \end{matrix}\right\}$ vl. v. H, L^2, L_z, S_z, S^2 ($\hookrightarrow$ vždy $\frac{3}{4}\hbar^2$) $\longrightarrow |n, l, m, s_z\rangle$

$\rightarrow$ ukážeme, že ~~také~~ ÚSKO je též J^2, J_z, L^2, S^2 .. vl. v. později

příklad 2: dvě částice se spinem $\frac{1}{2}$ .. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$

celk. spin → $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2 \equiv \hat{\vec{S}}_1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{\vec{S}}_2$ ... ztotožňujeme $S_1 \equiv S_1 \otimes I$
..ve značení nebudeme rozliš.

přitom $[S_{1i}, S_{2j}] = 0$

Přitom $[S_{1i}, S_{1j}] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_{1k}$ .. podobně $\hat{\vec{S}}_2$

$\Rightarrow [S_i, S_j] = [S_{1i}+S_{2i}, S_{1j}+S_{2j}] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk}(S_{1k}+S_{2k}) = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} S_k$

$\uparrow [1,1] \quad \uparrow [2,2] \qquad [1,2]=[2,1]=0$

$\Rightarrow$ spektrum S musí být spektrum oper. mom. hybnosti.

jinde vynech.

ÚSKO: $S_1^2, S_{1z}, S_2^2, S_{2z}$ ... přir. baze v $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$: $|S_z\rangle_1 \otimes |S_z\rangle_2 = |\underset{m_1}{S_{z1}}, \underset{m_2}{\cancel{S_{z2}}}\rangle$ $\;$ (m_1, m_2)

$\rightarrow$ dimenze prost. 4 : baze $\{|+\rangle|+\rangle, |+\rangle|-\rangle, |-\rangle|+\rangle, |-\rangle|-\rangle\}$ $\pm\frac{1}{2}$

Jiná možnost .. ÚSKO: S^2, S_z, ~~...~~ ... báze $|S, m\rangle$ – není jasné jestli další index?

potřebujeme 4 bázi. vektory: 1. $|s, m\rangle \equiv |1, 1\rangle = |++\rangle$ .. $s=1, m=1$

~~$S^2|++\rangle = ...$~~

$S_z = (S_{1z}|+\rangle)|+\rangle + |+\rangle(S_{2z}|+\rangle) = \left(\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}\right)|+\rangle|+\rangle = \hbar|++\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow s \geq 1$

2. $|s.m\rangle = |1\,0\rangle$: $\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|1\,0\rangle = J_-|1\,1\rangle$

$\hat{S}_-|11\rangle = (\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-})|++\rangle = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\,(|-+\rangle+|+-\rangle)$

(v případě spinu $\frac{1}{2}$ vždy 1 nebo 0)

$\Rightarrow |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle+|+-\rangle)$

3. $|s\,m\rangle = |1\,-1\rangle = |--\rangle$ ... opět je vidět, že $m=-1$ tj $s \geq 1$

nebo $J_-|1\,0\rangle = \sqrt{(1+0)(1-0+1)}\,|1\,-1\rangle = (|--\rangle+|--\rangle)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. zatím máme jen 3. dimenze v $\mathcal{L}\{|++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle\}$
(předchozí vektory jsou evidentně kolmé .. např. $\langle++|-+\rangle = \underset{0}{\langle+|-\rangle}\underset{1}{\langle+|+\rangle}$)
další LNZ (nejlépe kolmý) vektor ... ? $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle) = |s,m\rangle \equiv |0,0\rangle$

ověření pomocí S^2: relace

$\vec{S}^2 = (\vec{S}_1+\vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + 2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 + \vec{S}_2^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + 2(S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y})$

přitom $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \qquad S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$

$\Rightarrow 2(S_{1x}S_{2x}+S_{1y}S_{2y}) = 2\cdot\left(\frac{1}{4}(S_{1+}+S_{1-})(S_{2+}+S_{2-}) - \frac{1}{4}(S_{1+}-S_{1-})(S_{2+}-S_{2-})\right)$

$= S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$

$\rightarrow \vec{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + (S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+})$

$\Rightarrow \vec{S}^2|++\rangle = \left[\hbar\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+2\cdot\frac{1}{4}\right)+0\right]|++\rangle = 2\hbar|++\rangle = 1(1+1)\hbar|++\rangle$ .. $s=1$

$\vec{S}^2(|+-\rangle+|-+\rangle) = \left\{\hbar\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}\right)+\hbar\right\}(|+-\rangle+|-+\rangle) = 2\hbar(|+-\rangle+|-+\rangle)$ .. $S=1$

$\vec{S}^2(|+-\rangle-|-+\rangle) = \left\{\hbar\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2\frac{1}{4}\right)-\hbar\right\}(|+-\rangle-|-+\rangle) = 0$ .. $S=0$

ZOBECNĚNÍ: Q-teorie skládání mom. hybn. (dle Sakuraie)

(1) $[\hat{J}_{1i}, \hat{J}_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{J}_{1k}$ ... podob. $\hat{\vec{J}}_2$

$[\hat{J}_{1i}, \hat{J}_{2j}] = 0 \quad \forall i j$

(4)

možné ÚSKO: $\vec{J}_1^{\,2}, J_{1z}, \vec{J}_2^{\,2}, J_{2z}$ ... $|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

přičem $\vec{J}_1^{\,2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$

$J_{1z} |j_1 j_2; m_1, m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ + podob. $\vec{J}_2^{\,2}, J_{2z}$

alternativní ÚSKO: $\vec{J}^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}, \vec{J}_2^{\,2}, J_z$ ... důvod .. $\vec{J}$ je gener. rotací

.. často $[H, \vec{J}] = 0$ ale $[H, \vec{J}_1^{\,2}] \neq 0$, $[H, \vec{J}_2^{\,2}] \neq 0$

(2) opět platí: $\vec{J}^{\,2} = \vec{J}_1^{\,2} + \vec{J}_2^{\,2} + 2J_{1z}J_{2z} + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}$

(3)

$\Rightarrow [J^2, J_1^2] = 0$ (neboť J_1^2 komut. se $\forall$ 2-oper. a $[J_1^2, J_{1\pm}] = 0$)

$[J_1^2, J_z]$ jednodušeji $= [J_1^2, J_{1z} + J_{2z}] = [J_1^2, J_{1z}] = 0$

tj. komutují .. značení $|j_1 j_2; j m\rangle$:

$J_1^2 |j_1 j_2; j, m\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 j_2; j m\rangle$ + podob. J_2^2

$J^2 |j_1 j_2; j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j_1 j_2; j m\rangle$ ← toto jediné nenulové tj. odpovědné za netriv. transformaci

$J_z |j_1 j_2; j m\rangle = \hbar m |j_1 j_2; j m\rangle$

Pozor acholi $[J^2, J_z] = 0$ je $[J^2, J_{1z}] \neq 0$ a $[J^2, J_{2z}] \neq 0$

J_1^2, J_2^2 | J_{1z}, J_{2z}

$J_1^2 J_2^2$ | J^2, J_z

tj. $|j_1 j_2; j m\rangle$ nejsou totožné s $|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle$, ale

$$|j_1 j_2\, j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan coefficients}}$$

(obecně .. báze v invar. podprostorech kanon. rozvinu grup.)

které koef. jsou nulové:

(1) musí být $m = m_1 + m_2$ neboť

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | \underbrace{J_z - J_{1z} - J_{2z}}_{0} | j_1 j_2; j m\rangle = (m - m_1 - m_2)\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle = 0$$

(2) Δ-nerovnost .. klasicky:

... $|\vec{J}| < |j_1| + |j_2|$

a $j_1 < j + j_2$

$\Rightarrow \underbrace{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2}$ ... pokud není splň.: $\langle\ |\ \rangle = 0$

opět jediné netriviální kvůli $[J_{1z}, J^2] \neq 0$; $[J_{2z}, J^2] \neq 0$

je konsistentní s dimenzionalitou problému:

.. dimenze lin. obalu $\{|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle\}$ ... $N=(2j_1+1)(2j_2+1)$

dimenze $\{|j_1 j_2; j, m\rangle\}$ .. předp. že $\forall j$ právě jeden a $j_1 > j_2$ .. BÚNO

$$N = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = \frac{1}{2}\underbrace{\left[2(j_1+j_2+j_1-j_2)+2\right]}_{1.+\text{poslední}}\underbrace{\left[j_1+j_2+1-j_1+j_2\right]}_{\text{počet členů řady}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[4j_1+2\right]\left[2j_2+1\right] \quad \text{.. stejné}$$

~~viz též~~ FORMÁNEK

pozn: podrobnější konstrukce (opakování postupu ze $s_1=\frac{1}{2}+s_2=\frac{1}{2}$)

$|m_1=j_1, m_2=j_2\rangle$ je identický s $|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2\rangle$ (prostřed. vynechávám $|j_1 j_2 j \ldots\rangle$ ve značení) (ověření j pomocí $J^2 = \ldots$)

$\downarrow J_- = J_{1-}+J_{2-}$

$\sqrt{2j}\,|j, m=j-1\rangle = \sqrt{2j_1}\,|m_1=j_1-1, m_2=j_2\rangle + \sqrt{2j_2}\,|m_1=j_1, m_2=j_2\rangle$

$\downarrow J_-$ ↳ ortogonalizace: ... ověření že J^2 odpov. $j-1$ pomocí J_+

$|j, m=j-2\rangle$ $\qquad |j-1, m-1\rangle = \sqrt{\frac{2j_2}{2j}}\,|m_1-1, m_2\rangle - \sqrt{\frac{2j_1}{2j}}\,|m_1, m_2-1\rangle$

$\downarrow J_-$

$|j-1, m-2\rangle \rightarrow$ ortogonalizace $|j-2, m-2\rangle \longrightarrow \ldots$

diskuse N výše nás přesvědčí o tom, že vyčerpáme celý prostor $|m_1, m_2\rangle$

Vlastnosti Clebsch-Gordanových koef:

① $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2, j m\rangle$ tvoří unitární matici

neboť jde o přechod mezi basemi $m_1 m_2 \to j m$ určitě. vl. podprostoru j_1, j_2

$$\begin{array}{cc} & \cdots\ jm\ \cdots \\ m_1 m_2 & \begin{pmatrix} \langle j_1 j_2, m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \end{pmatrix} \end{array}$$

ve vhodném uspoř. blok. diagonální (relace $m=m_1+m_2$)

con.. definice ↑ nefixuje fázi koef. ... konvence .. Condon-Shortley

1, požadavek aby fungovala konstrukce ↑↑ fixuje spoustu fází

2, požadavek reálnosti $\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2, j m\rangle \in \mathbb{R}$ fixuje vše až na znaménka

důsledky: $\langle j_1 j_2 | m_1 m_2 | j_1 j_2, j m\rangle = \langle j_1 j_2 | j m | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$

reálná unit. matice je ortogonální tj $UU^T = U^T U = I$

tj. jak řádky tak sloupce tvoří ON bázi v $\mathbb{R}^N$

neboli

a) $$\sum_{jm} \langle j_1 j_2, m_1 m_2 | j_1 j_2, j m\rangle\langle j_1 j_2 | m_1' m_2' | j_1 j_2 j m\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$$

b) $$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 j_2 | m_1 m_2 | j_1 j_2, j m\rangle\langle j_1 j_2 | m_1 m_2 | j_1 j_2, j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

občas se setkáme s tzv. Wignerův 3j symbol:

$$\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle \equiv (-1)^{j_1-j_2+m}\cdot\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix}$$

který má více symetrií např. se nemění při sudé permut. sloupců a liché vyjma znaménka $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$

více viz Edmonds: Angular Momentum in QM

Konstrukce C-G koeficientů

Rekurentní relace: (pro stručnost vynechávám $j_1 j_2$ ... automat. pracuji v rozš. podprost.)

$$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\langle m_1 m_2|j, m\pm 1\rangle = \sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\,\langle m_1\mp 1, m_2|jm\rangle \qquad (R\pm)$$
$$+\sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_1)}\,\langle m_1, m_2\mp 1|jm\rangle$$

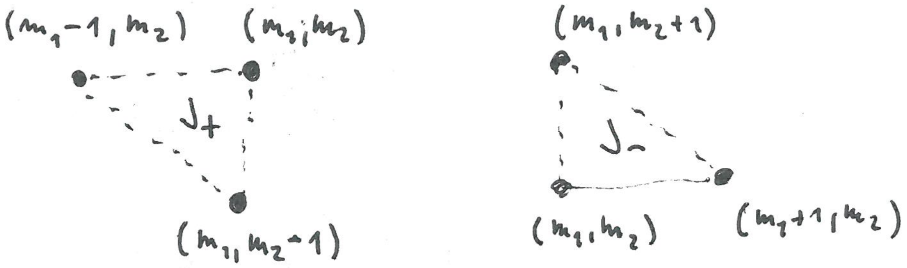
DK: $J_\pm|jm\rangle = (J_{1\pm}+J_{2\pm})\sum_{m_1 m_2}|m_1 m_2\rangle\langle m_1 m_2|jm\rangle$

$$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j, m\pm 1\rangle = \sum_{m_1' m_2'}\left\{\sqrt{(j_1\mp m_1')(j_1\pm m_1'+1)}\,|m_1'\pm 1, m_2'\rangle + \sqrt{(j_2\mp m_2')(j_2\pm m_2'+1)}\,|m_1', m_2'\pm 1\rangle\right\}\langle m_1' m_2'|jm\rangle$$

$\downarrow$ vynásobení $\langle m_1 m_2|$ + využití ortogonality .. první člen $m_1=m_1'\pm 1$ $m_2=m_2'$
druhý: $m_1=m_1'$ $m_2=m_2'\pm 1$

$\Rightarrow$ C.B.D.

Použití relací:



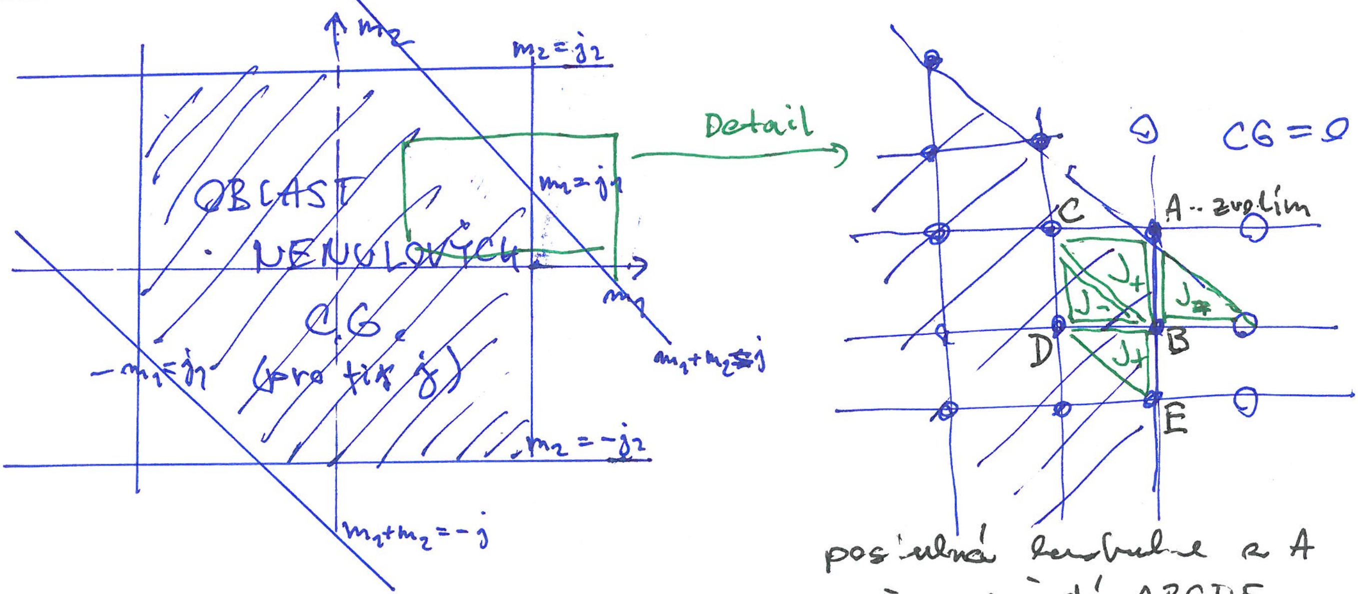
j se nemění
.. nutno opakovat

neznáme jedno číslo $\forall j$
$\rightarrow$ z normalizace a Condon-Shortley konvence:

$\langle j_1, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = 1$

$\langle j_1, j-j_1 | j, j\rangle > 0$

SCHEMA KONSTRUKCE: ($\forall j$ fixní $= j_1+j_2, j_1+j_2-1, \dots, 0$)



postupná konstrukce z A
napříč v pořadí ABCDE ....

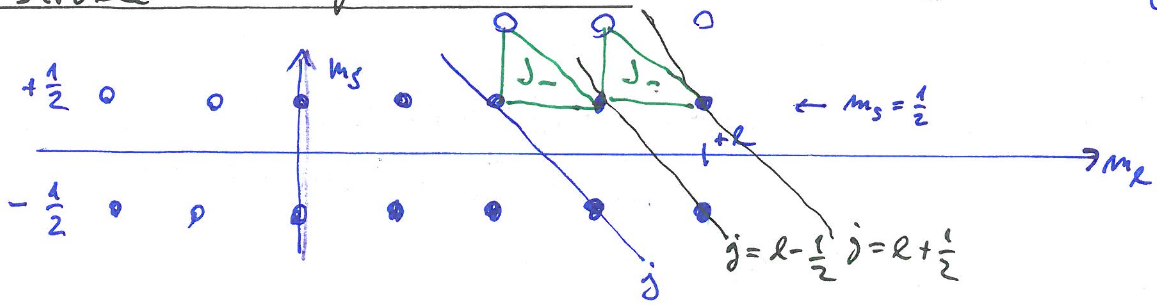
PŘÍKLAD: částice se spinem $\frac{1}{2}$ ve sfér. poli $\vec{L}$ komutuje s H

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{orbit}\otimes\mathcal{H}_{spin}$ $\qquad \vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$

... tj. $j_1 = l$ $\quad m_1 = m_l$ $\qquad$ Δ nerovnost povoluje jen $j = l\pm\frac{1}{2}$

$j_2 = s = \frac{1}{2}$ $\quad m_2 = m_s = \pm\frac{1}{2}$ $\qquad$ (pro $l=0$ jen $j=\frac{1}{2}$)

konstrukce C-G pro $J = L + S$:



pro $j = l + \frac{1}{2}$ $(R-)$:

$$\sqrt{(l+\tfrac{1}{2}+m+1)(l+\tfrac{1}{2}-m)}\,\langle m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}|l+\tfrac{1}{2},m\rangle = \sqrt{(l+m+\tfrac{1}{2})(l-m+\tfrac{1}{2})}\,\langle m+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}|l+\tfrac{1}{2},m+1\rangle$$

přičemž konvence diktuje $\langle l,\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}\rangle = 1$

pro $m = l+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}, \dots, -l-\frac{1}{2}$

iterace $\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+\frac{1}{2})\cancel{(l-m+\frac{1}{2})}}{(l+m+\frac{3}{2})\cancel{(l-m+\frac{1}{2})}}}\,\langle m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m+1\rangle$

$$= \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{\cancel{l+m+\frac{3}{2}}}}\sqrt{\frac{\cancel{l+m+\frac{3}{2}}}{l+m+\frac{5}{2}}}\,\langle \underbrace{m+\tfrac{3}{2}}_{+1},\tfrac{1}{2}|l+\tfrac{1}{2},m+2\rangle$$

$\vdots$

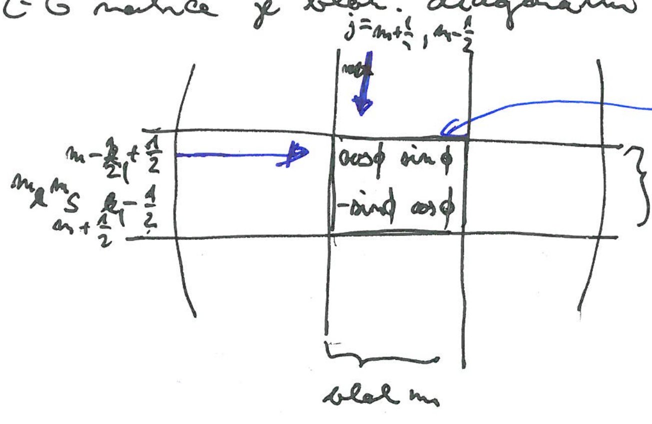
$$= \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,\underbrace{\langle l,\tfrac{1}{2}|l+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}\rangle}_{=1}$$

tj. $\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}|l+\frac{1}{2},m\rangle = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$ ... jen horní řádek pro $j = \frac{1}{2}+l$
ještě dolní řádek a každé $j = l-\frac{1}{2}$

C-G matice je blok. diagonální ... nenulové jen bloky $m = m_1 + m_2$

$\leftarrow$ matice pro fixní l, s

...



+ UNITARITA

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$$

$$\sin\phi = \sqrt{1-\cos^2\phi} = \sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} = \langle m-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}|$$

Definice spin-úhlové funkce (spin-orbitaly)

$$\mathcal{Y}_l^{j=l\pm\frac{1}{2},m} = \pm\sqrt{\frac{l\pm m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_l^{m-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\chi_+ + \sqrt{\frac{l\mp m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\,Y_l^{m+\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\chi_-$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{l\pm m+\frac{1}{2}}\,Y_l^{m-1/2}(\theta,\varphi) \\ \sqrt{l\mp m+\frac{1}{2}}\,Y_l^{m+1/2}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}$$

... vlast. fce L^2, S^2, J^2 a J_z

$\Rightarrow$ také vl. fce $\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)$

$(+)$: $\frac{l}{2}\hbar^2$ pro $j = l+\frac{1}{2}$

$(-)$: $-\frac{l+1}{2}\hbar^2$ $j = l-\frac{1}{2}$