nepřednášel

Schwingerův oscilátorový model momentu hybnosti

[SM-1]

(dle Sakurai p. 217)

Dva nezávislé LHO: typ +: $a_+,\ a_+^\dagger$

typ −: $a_-,\ a_-^\dagger$

standardní komut. relace: $[a, a^\dagger] = 1$ $\quad N_+ = a_+^\dagger a_+ \quad N_- = a_-^\dagger a_-$

$[N, a] = -a$ $\quad \left[\begin{matrix} a_+ & a_- \\ a_+^\dagger & a_-^\dagger \end{matrix}\right] = 0$ ... ∀ kombinace

$[N, a^\dagger] = a^\dagger$

N_+, N_- komutují. Společné vektory: $N_+|m_+, m_-\rangle = m_+|m_+, m_-\rangle$ $\quad m = 0, 1, 2, \dots$

$N_-|m_+, m_-\rangle = m_-|m_+, m_-\rangle$

přičemž $a_+^\dagger|m_+ m_-\rangle = \sqrt{m_+ + 1}\,|m_+ + 1, m_-\rangle$ $\qquad a_+|m_+ m_-\rangle = \sqrt{m_+}\,|m_+ - 1, m_-\rangle$

Bázi lze vybudovat z vakua $a_+|00\rangle = a_-|00\rangle = 0$

$$\rightarrow \quad |m_+ m_-\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{m_+}(a_-^\dagger)^{m_-}|00\rangle}{\sqrt{m_+!\,m_-!}}$$

def: $\boxed{J_+ \equiv \hbar a_+^\dagger a_- \qquad J_- \equiv \hbar a_-^\dagger a_+ \qquad J_z \equiv \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-)}$

Tyto operátory splňují def. mom. hybnosti:

(1) $[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \leftarrow (iy) \mp i(ix)$ $\qquad$ (ix) $[J_y, J_z] = i\hbar J_x \leftarrow (1)_+ - (1)_-$

pozn: $\Leftarrow\!\!\!\!\Rightarrow$ $\boxed{J_\pm = J_x \pm iJ_y}$ $\qquad$ (iy) $[J_z, J_x] = i\hbar J_y \leftarrow (1)_+ + (1)_-$

(2) $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \leftarrow (iz)$ $\qquad$ (iz) $[J_x, J_y] = i\hbar J_z \leftarrow (2)$

DK (1): $[J_z, J_+] = \frac{\hbar^2}{2}\{\underbrace{[N_+, a_+^\dagger]}_{a_+^\dagger} a_- - a_+^\dagger \underbrace{[N_-, a_-]}_{-a_-}\} = \hbar^2 a_+^\dagger a_- = \hbar J_+$ $\rightarrow$ J_- je obdobné jen naopak

DK (2): $[J_+, J_-] = \hbar^2 [a_+^\dagger a_-, a_-^\dagger a_+] = \hbar^2 a_+^\dagger \underbrace{[a_-, a_-^\dagger]}_{1} a_+ + \hbar^2 a_-^\dagger \underbrace{[a_+^\dagger, a_+]}_{-1} a_- = \hbar^2(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = 2\hbar$

Přitom: def $N \equiv N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$

a platí $J^2 \equiv J_z^2 + J_y^2 + J_x^2 \overset{①}{=} J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) \overset{②}{=} \frac{\hbar^2}{2} N\left(\frac{N}{2} + 1\right)$

DK: ①: $\frac{1}{2}(J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) + \frac{1}{2}(J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 + \frac{i}{2}(J_yJ_x - J_xJ_y + J_xJ_y - J_yJ_x)$

② $= \frac{\hbar^2}{2}(a_+^\dagger a_+ \underbrace{a_- a_-^\dagger}_{a_-^\dagger a_- + 1} + \underbrace{a_+ a_+^\dagger}_{a_+^\dagger a_+ + 1} a_-^\dagger a_-) + \frac{\hbar^2}{4}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\{(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-)^2 + 2(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-)\} =$

Interpretace: $J_z = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-)$ $\quad \dots \quad m = \frac{m_+ - m_-}{2} = -j, -j+1, \dots, +j$

$J^2 = \hbar^2 \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right)$ $\quad \dots \quad j = \frac{m_+ + m_-}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \dots$

$a_+^\dagger$ ... kreuje boson se spinem $\frac{1}{2}$, $|\uparrow\rangle$

$a_-^\dagger$ ... kreuje −″− ve stavu $|\downarrow\rangle$

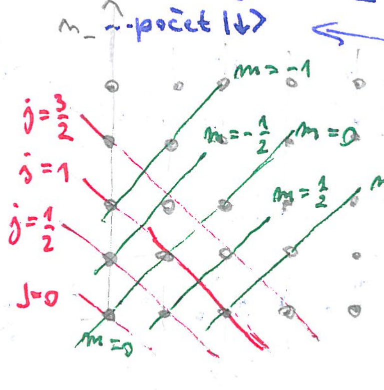
J_+ .. anihiluje $|\downarrow\rangle$ a kreuje $|\uparrow\rangle$

.. tj $\hbar m \to \hbar m + \hbar$

J_- .. anihiluje $|\uparrow\rangle$ a kreuje $|\downarrow\rangle$

.. tj $\hbar m \to \hbar m - \hbar$

Grupa symetrie, která je zodpovědná za degeneraci 2D LHO je reprezentací grupy rotací



neinteragující bosony se spinem $\frac{1}{2}$

m_+ .. počet $|\uparrow\rangle$

Použití: nalezení rotačních matic $D^{(j)}_{mm'}$

Rotační matice jsou dány jen algebrou operátorů $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ popř. $\hat{J}_+, \hat{J}_-$. Výše jsme ukázali, že $|j,m\rangle$ lze chápat jako n_+ částic se spinem $+\frac{1}{2}$ a n_- částic se spinem $-\frac{1}{2}$, kde $j = \frac{n_+ + n_-}{2}$; $m = \frac{n_+ - n_-}{2}$ → co se algeb. vlastností neodliš. od jakýchkoli jiných $|j,m\rangle$; tj. REPREZENTACE:

$$|j,m\rangle = |n_+ = j+m, n_- = j-m\rangle = \frac{(a_+^+)^{n_+}(a_-^+)^{n_-}}{\sqrt{n_+!}\sqrt{n_-!}}|00\rangle = \frac{(a_+^+)^{j+m}(a_-^+)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!}\sqrt{(j-m)!}}|0\rangle$$

pozn: $[a_+, a_-] = 0$ → bosony se spinem $\frac{1}{2}$ ... jen algeb. pomůcka

Netriviální část rotační matice: $\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\gamma}$

$$\mathcal{D}(R) \equiv \mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma)|_{\alpha=\gamma=0} = \exp\left\{-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right\} = \exp\left\{-\frac{\beta}{2}(a_+^+a_- - a_-^+a_+)\right\}$$

$J_+ = J_x + iJ_y \quad J_- = J_x - iJ_y \quad \to \quad J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$

vlastnosti: • $\mathcal{D}(R)|0\rangle = |0\rangle$ (důsl. $a_-|0\rangle = a_+|0\rangle = 0$)

• $\mathcal{D}(R)\, a_+^+ \mathcal{D}^{-1}(R) = a_+^+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_-^+\sin\frac{\beta}{2}$ $(*)$

$\mathcal{D}(R)\, a_-^+ \mathcal{D}^{-1}(R) = a_-^+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - a_+^+\sin\frac{\beta}{2}$

Dk: buď jako důsl. transf. spinu $|\beta:+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|z:+\rangle + \sin\frac{\beta}{2}|z:-\rangle$

$|\beta:-\rangle = \cos\frac{\beta}{2}|z:-\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|z:+\rangle$

nebo přímo (Baker-Hausdorf): $\exp\{i\hat{G}\lambda)\hat{A}\exp\{-i\hat{G}\lambda) = \hat{A} + i\lambda[\hat{G},\hat{A}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]] + \dots$

$= \exp\{i\lambda[\hat{G},\cdot]\}\hat{A}$

přičemž: $\left[-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^+\right] = \frac{1}{2i}[a_-^+a_+, a_+^+] = \frac{1}{2i}a_-^+$

$\left[-\frac{J_y}{\hbar},\left[-\frac{J_y}{\hbar}, a_+^+\right]\right] = \left[-\frac{J_y}{\hbar}, \frac{a_-^+}{2i}\right] = \frac{1}{4}a_+^+ \quad \dots$

důsledek:

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \frac{[\mathcal{D}a_+^+\mathcal{D}^{-1}]^{j+m}[\mathcal{D}a_-^+\mathcal{D}^{-1}]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\mathcal{D}(R)|0\rangle$$

(dosaz $*$)

$$= \sum_k\sum_l \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)!k!(j-m-l)!l!}\frac{[a_+^+\cos\frac{\beta}{2}]^{j+m-k}[a_-^+\sin\frac{\beta}{2}]^k[-a_+^+\sin\frac{\beta}{2}]^{j-m-l}[a_-^+\cos\frac{\beta}{2}]^l}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0\rangle$$

+ srovn s def d-matic:

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \sum_{m'}|jm'\rangle d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_{m'} d^{(j)}_{m'm}(\beta)\frac{(a_+^+)^{j+m'}(a_-^+)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}|0\rangle$$

$\langle jm'|e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}|jm\rangle$

srovn: stejné mocn. u a_+^+ ... $j+\cancel{m}-k+\cancel{j}-\cancel{m}-l=\cancel{j}+m'$

$$l = j-k-m'$$

$\sim \sum_l \to \sum_{m'}$ mocn. u a_-^+ ... $k+l = j-m'$ ✓

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+m')!\,(j-m')!}}{(j+m-k)!\,k!\,(k+m'-m)!\,(j-k-m')!} \cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2} \sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2} \cdot (-1)^{k-m+m'}$$

sum. meze .. tak aby $\forall$ arg! byly ≥ 0