# Zápočtová písemka z kvantové mechaniky II

*čas na řešení: 90min*

**Úloha 1**(10 bodů)
Dva spiny 1 a 1/2 spolu interagují prostřednictvím hamiltoniánu

$$\hat{H} = -\frac{\alpha}{\hbar^2}\vec{s}^{\,(1)} \cdot \vec{s}^{\,(2)},$$

kde $\alpha > 0$ je konstanta. Popište základní stav tohoto systému pomocí matice hustoty. Předpokládejte, že všechny stavy s nejnižší energií jsou zastoupeny se stejnou pravděpodobností. Ve stavu daném touto maticí hustoty spočtěte pravděpodobnost naměření nulové projekce spinu první částice na osu $z$.

**Úloha 2**(10 bodů)
Vibrační stavy molekuly budeme modelovat jako částici v jednorozměrné potentiálové jámě. Pomocí WKB aproximace odhadněte kolik vibračních stavů má molekula popsaná Morseho potenciálem

$$V(x) = D\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right),$$

kde $D$, $\alpha$ jsou kladné konstanty a $m$ je hmotnost částice.

**Úloha 3**(10 bodů)
Interakce dvou částic se spinem 1/2 je popsána hamiltoniánem $\hat{H}_0 = -\epsilon\vec{\sigma}^{\,(1)} \cdot \vec{\sigma}^{\,(2)}$, kde $\epsilon > 0$ je konstanta a $\vec{\sigma}^{\,(i)}$ je vektor Pauliho matic působící na spinové stupně volnosti $i-$té částice. V prvním řádu poruchové teorie spočtěte, jak se rozštěpí energetické hladiny tohoto systému po přiblížení třetí částice, která způsobí poruchu hamiltoniánu

$$\hat{V} = -t\left(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(3)} + \sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}\right),$$

kde $0 < t \ll \epsilon$. Odhadněte jak výsledek ovlivní vyšší řády.

**Úloha 4**(10 bodů)
Dva nerozlišitelné bosony s hmotností $m$ a spinem 0 jsou v nekonečně hluboké potenciálové jámě délky $L$ (tj. $V(x_i) = 0$ pro $x_i \in \langle 0, L\rangle$ a $V = \infty$ pro ostatní $x_i$=souřadnice částice $i = 1, 2$) a interagují spolu prostřednistvím kontaktní interakce $V(x_1, x_2) = -\lambda\delta(x_1 - x_2)$, kde $\lambda = 2\pi^2\hbar^2/(mL^2)$. Pomocí variačního principu najděte odhad energie základního stavu. Testovací vlnovou funkci volte ve tvaru $\psi(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2)$, kde

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\left[\alpha\sin\frac{\pi x}{L} + \beta\sin\frac{2\pi x}{L}\right]$$

$\alpha$, $\beta$ jsou variační parametry (funkce bude normovaná pro $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Napište zda je možné tento výsledek nějak použít i pro případ dvou nerozlišitelných fermionů se spinem 1/2.

**Úloha 5**(10 bodů)
V Hubbardově modelu, je možné definovat kvadrát celkového spinu pomocí operátoru

$$\hat{S}^2 = \hbar^2\sum_m\sum_n \hat{c}^\dagger_{m+}\hat{c}^\dagger_{n-}\hat{c}_{n+}\hat{c}_{m-} + \frac{\hbar^2}{2}\hat{N} + \frac{\hbar^2}{4}(\hat{N}_+ - \hat{N}_-)^2,$$

kde $\hat{c}^\dagger_{n\sigma}$ kreuje elektron se spinem $\sigma$ do místa $n$, $\hat{N}_\sigma = \sum_n \hat{c}^\dagger_{n\sigma}\hat{c}_{n\sigma}$ je operátor počtu elektronů se spinem $\sigma$ a $\hat{N} = \hat{N}_+ + \hat{N}_-$. Ukažte, že vektor

$$|\psi_0\rangle = (\hat{c}^\dagger_{1+}\hat{c}^\dagger_{2-} + \hat{c}^\dagger_{1-}\hat{c}^\dagger_{2+})|0\rangle$$

je vlastním vektorem tohoto operátoru a najděte hodnotu celkového spinu $s$.

*Mohou se hodit:*

$$\int_0^\pi(\sin x)^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi(\sin x)^4 = \frac{3\pi}{8}, \qquad \int_0^\pi(\sin x)^2(\sin 2x)^2 = \frac{\pi}{4},$$