Cvičení 1: Matice hustoty.

Motivace: Procvičit si základní formalismus kvantové mechaniky s použitím matice hustoty. Osahat si vlastnosti matice hustoty v různých jednoduchých situacích.

Úloha 1 - matice hustoty různých stavů částice se spinem 1/2

Uvažujte částici se spinem 1/2. Stavy a operátory budeme zapisovat tradičně v bázi dané vlastními vektory $|+\rangle$, $|-\rangle$ operátoru $\hat{s}_z$. Napište matici hustoty pro

a) částici v čistém stavu $|\psi\rangle = |+\rangle$,

b) částici ve smíšeném stavu: $|\psi\rangle = |+\rangle$ nebo $|-\rangle$ se stejnou pravděpodobností 1/2,

c) částici v čistém stavu $|\psi\rangle = |x:+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$,

d) částici ve smíšeném stavu: $|\psi\rangle = |x:+\rangle$ nebo $|x:-\rangle$ se stejnou pravděpodobností 1/2,

e) částici v čistém stavu $|\psi\rangle = |n:+\rangle$, který je vlastním stavem operátoru $\hat{s}_n = \frac{\hbar}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$.

f) částici ve smíšeném stavu $|\psi\rangle = |n:+\rangle$, kde všechny směry $\vec{n}$ jsou stejně pravděpodobné.

Poznámka: Minulý semestr jsme na cvičení odvodili, že pokud jednotkový vektor $\vec{n}$ napíšeme ve sférických souřadnicích $\vec{n} = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$, jsou komponenty vektoru $|\psi\rangle = \psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle$ rovny $\psi_+ = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi/2}$, $\psi_- = \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi/2}$.

Úloha 2 - polarizační vektor pro částici se spinem 1/2

Matice $\hat{I}$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ a $\hat{\sigma}_z$ tvoří bázi prostoru všech matic 2×2, tj. také matici hustoty lze napsat jako lineární kombinaci $\hat{\rho} = A\hat{I} + B\hat{\sigma}_x + C\hat{\sigma}_y + D\hat{\sigma}_z$. Aby bylo $\hat{\rho}$ maticí hustoty, musí navíc splňovat podmínky $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$, $\mathrm{Tr}\hat{\rho} = 1$ a pozitivní semi-definitnost $\langle v|\hat{\rho}|v\rangle \geq 0$, pro všechny stavy $|v\rangle$.

a) Ukažte, že každou matici hustoty $\hat{\rho}$ pro částici se spinem 1/2 lze napsat ve tvaru $\rho = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})$, kde $|\vec{p}| \in \langle 0, 1\rangle$.

b) Ukažte, že ρ popisuje čistý stav právě tehdy, když $|\vec{p}| = 1$.

c) Najděte střední hodnoty operátorů $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ a $\hat{s}_z$ v tomto stavu.

Poznámka: Vektor $\vec{p}$ z části a) se nazývá polarizačním (nebo Blochovým) vektorem. Prostor všech čistých stavů lze tedy ztotožnit s povrchem jednotkové sféry, prostor smíšených stavů s jejím vnitřkem (tzv Blochova sféra). Stejný formalizmus lze aplikovat pro libovolný dvoustavový systém (tzv. Q-bit).
Nápověda: Pro řešení části c) je dobré si uvědomit relace $\hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma + \delta_{\alpha\beta}\hat{I}$ a $\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_\alpha) = 0$, z nichž plyne $\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$.

Úloha 3 - redukovaná matice pro entanglovaný stav

Systém dvou částic se spinem 1/2 je připraven v entanglovaném stavu s vlnovou funkcí

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right),$$

kde u každého vektoru $|s\rangle_i$ píšeme jestli z-tová projekce spinu s se týká částice $i = 1$ nebo $i = 2$. Najděte redukovanou matici hustoty pro popis spinového stavu částice 1. Jaký je polarizační vektor tohoto stavu?

Úloha 4 - časový vývoj matice hustoty pro neinteragující podsystém

Systém se skládá ze dvou částí, takže jeho Hilbertův prostor je daný direktním součinem $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému se skládá ze dvou částí

$$\hat{H} = \hat{H}^{(1)} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}^{(2)},$$

takže podsystém 1 neinteraguje s podsytémem 2. Dokažte, že časový vývoj redukované matice hustoty $\hat{\rho}^{(1)}$ podsystému 1 pak splňuje rovnici

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}^{(1)} = [H^{(1)}, \hat{\rho}^{(1)}]$$

tj. časový vývoj podsystémů 1 a 2 je nezávislý.