Cvičení 10: Časově závislá poruchová teorie.

Motivace: Spočíst pravděpodobnosti přechodů pomocí poruchové teorie a zamyslet se nad oblastí platnosti a různými limitami.

Harmonický oscilátor v poli vybíjejícího se kondenzátoru

Na částici zachycenou v základním stavu v 1D potenciálové jámě s kvadratickým potenciálem (lineární harmonický oscilátor s vlastní frekvencí ω) začne v čase $t_0 = 0$ působit homogenní síla $F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$, kde $\tau > 0$ je relaxační čas.

- V prvním řádu poruchové teorie spočtěte pravděpodobnost přechodu do excitovaných stavů.
- Zamyslete se nad fyzikálním zdůvodněním existence limity pro $t \to \infty$ a spočtěte ji.
- Ve výsledku předchozího bodu proveďte navíc limitu $\tau \to 0$ a zdůvodněte výsledek.
- Co limita $\tau \to \infty$? Zamyslete se nad podmínkami platnosti poruchového rozvoje v tomto případě. Uměli byste v této limitě vyřešit úlohu jinak?

Poznámka: Nezapomeňte, že v zadání uvádíme působící sílu, zatímco pro poruchový výpočet potřebujete potenciál. Při řešení budete potřebovat maticový element operátoru $\hat{x}$ v oscilátorové bázi, který známe z minulého semestru:

$$\langle n'|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\,\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1}).$$

Ještě jednou oscilátor a impulz síly

Tentokrát na stejný systém připravený v čase $t_0 \to -\infty$ v základním stavu působí homogenní síla s časovým průběhem

$$F(t) = F_0 \frac{\tau/\omega}{\tau^2 + t^2}.$$

- V prvním řádu poruchové teorie spočtěte pravděpodobnost přechodu do excitovaných stavů po skončení pulzu (tj. v limitě $t \to \infty$).
- Zamyslete se nad podmínkami platnosti poruchového rozvoje v tomto případě. Budou záviset na F_0, na τ?
- Jak vypadá výsledek v limitě $\tau \to 0$? Jaká situace tomu odpovídá v klasické fyzice?
- Proveďte limitu $\tau \to \infty$ (tomuto případu odpovídá tzv. adiabatická změna hamiltoniánu).

Poznámka: Časová závislost je volena tak, že na systém zapůsobí vždy stejný impulz síly

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = \frac{F_0\pi}{\omega}.$$

Mimochodem v minulém semestru jsme si uváděli vzorec

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} = \pi\delta(x).$$