Cvičení 6: Ireducibilní tenzorové operátory.

Motivace: Zvyknout si na ireducibilní složky tenzorů.

Tenzorový součin dvou vektorů

Mějme dva vektorové operátory U_k a V_l. Připomeňme, že jejich ireducibilní složky jsou $V_0^{(1)} = V_z$, $V_{\pm 1}^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)$ a podobně $U_m^{(1)}$. Zopakujte si definici tenzorového součinu dvou operátorů

$$W_m^{(j)} = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle U_{m_1}^{(j_1)} V_{m_2}^{(j_2)}.$$

Najděte explicitně komponenty $W_0^{(0)}$, $W_m^{(1)}$, $W_m^{(2)}$ a vyjádřete je pomocí kartézských složek vektorů U_k a V_l. Rozmyslete si jak nalezené operátory $W_m^{(j)}$ souvisí se sklárním a vektorovým součinem U_k a V_l a s tenzorem jejich diadického součinu $T_{kl} = U_k V_l$ a jeho rozkladem na izotropní, antisymetrickou a symetrickou bezestopou část.
Poznámka: Potřebné Clebschovy-Gordanovy koeficienty odečtěte ze vzorců pro skládání momentu hybnosti 1+1, které jsme nalezli ve cvičení 4:

$|22\rangle = |+\rangle|+\rangle$
$|21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|0\rangle + |0\rangle|+\rangle)$
$|20\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+\rangle|-\rangle + 2|0\rangle|0\rangle + |-\rangle|+\rangle)$
$|2{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|-\rangle + |-\rangle|0\rangle)$
$|2{-2}\rangle = |+\rangle|+\rangle$

$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|0\rangle - |0\rangle|+\rangle)$
$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$
$|1-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|-\rangle - |-\rangle|0\rangle)$

$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle|-\rangle - |0\rangle|0\rangle + |-\rangle|+\rangle)$

Wignerova-Eckartova věta pro skalární operátor

Mějme dvě částice s momenty hybnosti $\vec{L}_1$ a $\vec{L}_2$. Vypočtěte maticový element

$$\langle l_1 l_2 LM | \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 | l_1 l_2 L' M' \rangle,$$

kde $|l_1 l_2 LM\rangle$ jsou společné vlastní vektory operátorů $\vec{L}_1^2$, $\vec{L}_2^2$, $\vec{L}^2$ a L_z; přitom $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ je celkový moment hybnosti. Výsledek provnejte s Wignerovou-Eckartovou větou.
Nápověda: K vyčíslení maticového elementu vyjádřete skalární součin $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$ z $\vec{L}^2 = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$ pomocí operátorů $\vec{L}_1^2$, $\vec{L}_2^2$, $\vec{L}^2$.

Dipólové přechody v atomu vodíku

Uvažujte maticové elementy

$$\langle nlm | r_i | n' l' m' \rangle,$$

kde $r_i = x$, y nebo z a $|nlm\rangle$ jsou stacionární stavy atomu vodíku. Zamyslete se nad aplikací Wignerovy-Eckartovy věty na tyto maticové elementy a pro $n = n' = 2$ rozmyslete: a) jaký je počet těchto elementů, b) kolik je jich nenulových, c) kolik integrálů musíte opravdu spočítat (napište je!) a jak z nich dopočtete ostatní.