Úloha 2: Kruhová kvantová tečka.

Termín odevzdání: 19. března

Pomocí variačního principu nalezněte odhad energie základního (6bodů) a prvního excitovaného (4body) stavu částice ve dvou dimenzích v potenciálu $V(x, y)$, který je roven 0 uvnitř kruhu o poloměru a a jinde nekonečný.

Poznámky:

- Nemusíte hledat co nejpřesnějí odhad energie. Jde mi jen o to, abyste správně použili variační princip.
- Vyberte si vhodnou jednoduchou testovací funkci, abyste uměli provést všechny výpočty. Nezapomeňte, že testovací funkce pro variační princip musí být rovna nule na okraji kruhu.
- Můžete použít testovací funkce s nespojitou derivací, ale pak vyjádřete energii jako:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle \equiv -\int \psi(x)^* \Delta\psi(x) dV = \int \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi \, dV.$$

  Zatímco první formule generuje pro nespojitou derivaci delta-funkční členy, druhá tuto komplikaci nemá.
- Pro nalezení excitovaného stavu můžete využít symetrie problému. Základní stav bude rotačně symetrický. Dále je jasné, že existuje excitovaný stav, který je lichou funkcí v proměnné x. Alternativně lze využít rotační symetrie a hledat excitovaný stav s nenulovým momentem hybnosti $L = -i\hbar\partial/\partial\phi$.
- Problém lze řešit přesně, ale podobně jako ve třech dimenzích je řešení vyjádřeno pomocí Besselových funkcí. Díky variačnímu principu se jejich použití vyhneme.