Cvičení 1: Stacionární poruchová teorie.

Motivace: Praktické použití poruchové teorie, vlastnosti korekcí a srovnání s přesnými řešeními.

Úloha 1 - LHO v poli konstantní síly

Lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

je vystaven působení síly konstantní velikosti s potenciálem $V(x) = \lambda x$, kde λ je reálná konstanta.

a) Započtěte tento člen poruchově a nalezněte korekci energie do druhého řádu v λ.

b) Nalezněte přesné řešení porušeného problému a srovnejte s předchozím výpočtem. Co vás překvapí? Zdůvodněte.

c) Nalezněte korekci vlnové funkce do prvního řádu a pokuste se je srovnat s přesnými.

Poznámka: Pro výpočty použijte formalismu kreačních a anihilačních operátorů.

Úloha 2 - porucha ve dvoustavovém systému

V dvouhladinovém systému mějme operátory

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Najděte přesně vlastní energie pro hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$.

b) Uvažujete $\hat{H}_1$ jako malou poruchu k $\hat{H}_0$ a najděte energie do 2.řádu poruchové teorie.

c) Totéž, ale pomocí Brillouine-Wignerovy teorie.

d) Diskutujte výsledky a porovnejte poruchová řešení s přesným.

Úloha 3 - 2D nekonečně hluboká jáma s poruchou

Mějme částici ve dvourozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě, potenciálem $V(x,y) = 0$ pro $(x,y) \in \langle 0,L\rangle \times \langle 0,L\rangle$ a $V = \infty$ pro ostatní (x,y). Nalezněte energie a vlnové funkce pro dvě nejnižší hladiny. Najděte opravu energií těchto stavů v prvním řádu poruchové teorie, pokud přidáme potenciál $V_1(x,y) = \lambda xy$.

Úloha 4 - Rotor v magnetickém poli (Merzbacher)

Předpokládejme, že rotor v magnetickém poli je popsán hamiltoniánem

$$\hat{H} = A\hat{L}^2 + B\hat{L}_z + C\hat{L}_y,$$

pomocí operátorů kvadrátu momentu hybnosti a jeho složek operujících na prostoru kvadraticky integrovatelných funkcí na jednotkové kouli. Předpokládejte, že $B \gg C$ a najděte vlastní čísla v nějnižším nenulovém řádu poruchové teorie. Porovnejte s přesným řešením.

Úloha 5 - třístavový systém dle (Sakurai)

Uvažujte hamiltonián

$$H = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & a \\ 0 & e_1 & b \\ a^* & b^* & e_2 \end{pmatrix},$$

kde a, b jsou malá reálná čísla, $E_2 > E_1$ a $|a|, |b| \ll E_2 - E_1$. Pokuste se zahrnout členy úměrné a, b pomocí poruchové teorie do druhého řádu (oproti přednášce nedojde k sejmutí degenerace v prvním řádu, musíte vymyslet jak použít druhý řád). Zkontrolujte výsledek srovnáním s přesným řešením. Co Brillouin-Wigner?

Další možnosti:

Box $\langle 0, L\rangle \times \langle 0, L\rangle$ a porucha λxy. První tři stavy.
2D LHO plus $V = \lambda m\omega xy$, poruchově a přesně.
p orbital v H a porucha $V = \lambda(x^2 - y^2)$,
$H = B(a_1\sigma_z^{(1)} + a_2\sigma_z^{(2)}) + K\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$, předp. $a_1 \neq a_2$ a poruch pro oba případy $B \ll K$, a pro $B \gg K$ do 2.řádu a přesně.