Úloha 4: Excitace atomu vodíku rychlým průletem nabité částice (semiklasicky).

Termín odevzdání: do 9. května

Uvažujte atom vodíku v základním stavu, kolem nějž proletí těžká rychlá nabitá částice. Předpokládejte, že částice má tak velkou energii, že výměna energie s uvažovaným atomem vodíku neovlivní její dráhu ani rychlost, tj. že částice proletí po přímce s nejbližším přiblížením do vzdálenosti b od středu atomu daného polohou protonu, který uvažujte rovněž jako nehybný po celou dobu průletu (přiblížení nekonečné hmotnosti protonu). V prvním řádu poruchové teorie spočtěte amplitudy pravděpodobnosti excitace atomu vodíku do 2s stavu a do každého ze tří 2p stavů. Nápověda:

- Interakční Hamiltonián $V(t)$ rozložte do multipólového rozvoje

  $$V(t) \equiv \frac{G}{\left|\vec{r} - \vec{R}(t)\right|} = \sum_{LM} \frac{4\pi G}{2L+1} \frac{r^L}{R(t)^{L+1}} Y_{LM}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) Y^*_{LM}\left(\frac{\vec{R}(t)}{R(t)}\right),$$

  kde G je síla poruchy (daná nábojem částice), $\vec{R}(t)$ je trajektorie částice a $\vec{r}$ je souřadnice elektronu v atomu vodíku. Rozmyslete, které maticové elementy přispějí k excitační amplitudě v první řádu poruchové teorie a spočtěte je.

- Integrály přes časovou proměnnou vyjádřete pomocí modifikované Besselovy funkce

  $$K_v(x) = \frac{2^v \Gamma(v+1/2)}{\sqrt{\pi} x^v} \int_0^\infty \frac{\cos(xt)dt}{(t^2+1)^{v+1/2}}$$

  a její derivace, kde $\Gamma(x)$ je Eulerova gama funkce; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.