Lekce IV - Rozptyl na sfér. sym. $V(\vec{x})$

V lekci 2 jsme definovali vlastní fáze jako vl. č. S-matice na energetické slupce. V případě, že V má nějakou symetrii je možné klasifikovat tyto vl. č. pomocí ireducibilních reprezentací této symetrie – pro rotační symetrii q.č. ℓ.

Podrobněji:

Rotace popisujeme v QM pomocí $R(\vec{\alpha}) = \exp(i\vec{\alpha}\cdot\vec{J})$ (nebo Euler úhly $R(\alpha,\beta,\gamma)$)

kde $\alpha \equiv |\vec{\alpha}|$ je velikost úhlu a $\vec{\alpha}/\alpha$ směr osy rotace

sfér. sym: $\forall\vec{\alpha}$: $[R, H_0] = [R, H] = 0 \Rightarrow [R, \Omega_\pm] = [R, S] = 0$

I.R. grupy rotací jsou číslovány $\ell = 0, 1, 2, \dots$ (poločíselné nebo neuvažujeme ... spin tj. $J = L$)

... dimenze $(2\ell+1)$

sym.-adapt. báze $|E, \ell, m\rangle$ ... vl. stavy H_0, L^2, L_z -- $E, \ell(\ell+1), m$

Wigner-Eckartův teorém: (vlastně netriviální jen že S_ℓ nezáv. na m, jinak důsl. komutace)

$$\rightarrow \boxed{\langle E', \ell', m' | S | E, \ell, m\rangle = \delta(E'-E)\,\delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}\, S_\ell(E)}$$

.. unitarita S $\rightarrow$ $\boxed{S_\ell(E) = e^{2i\delta_\ell(E)}}$. (Eigenphase/phase shift) – FÁZOVÉ POSUNUTÍ δ_ℓ

pozn: K-matice

$$K = i\,\frac{1-S}{1+S} \longrightarrow \text{vl. č. } K_\ell(E) = i\,\frac{e^{-i\delta} - e^{i\delta}}{e^{-i\delta}+e^{i\delta}} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \operatorname{tg}\delta_\ell(E)$$

1 Amplituda rozptylu a účinný průřez

amplituda def pomocí $\langle p'|S|p\rangle$; vl. fáze $\langle E', \ell', m'|S|E, \ell, m\rangle$

překlad: $\langle \vec{p}\,|E\ell m\rangle = \frac{1}{\sqrt{mp}}\,\delta(E_p - E)\,Y_{\ell m}(\vec{n})$ $\quad \vec{p} = p\vec{n}$, $E = p^2/2m$

(řešení $H\psi = E\psi$ v p-reprezentaci + $L^2\psi = \ell(\ell+1)\psi$, $L_z\psi = m\psi$)

přechod od $\delta(p-p')$ k $\delta(E-E')$ normování rozklad rov. vlny do $Y_{\ell m}$

platí (1): $\langle p'|S - I|p\rangle = -2\pi i\,\delta(E_p - E_{p'})\,\frac{f(p',p)}{-m(2\pi)^2} = \frac{i}{2\pi m}\,\delta(E-E')\,f(p',p)$

(2): $\langle p'|(S-I)\sum_{\ell m}\int dE\,|E\ell m\rangle\langle E\ell m|p\rangle =$ $\quad \left|\,(S-I)|E\ell m\rangle = (e^{2i\delta}-1)|E\ell m\rangle\right.$

$$= \sum_{\ell m}\int dE\,\frac{1}{\sqrt{mp'}}\,\delta(E-E_{p'})\,Y_{\ell m}(\hat{p}')\,(S_\ell - 1)\,\frac{1}{\sqrt{mp}}\,\delta(E-E_p)\,Y^*_{\ell m}(\hat{p})$$

$$= \delta(E_p - E_p')\,\frac{1}{mp}\sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{p}')\,(e^{2i\delta_\ell}-1)\,Y^*_{\ell m}(\hat{p})$$

srov. (1) a (2) $\longrightarrow$

$$f(p',p) = \frac{2\pi}{ip}\sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{p}')\,[e^{2i\delta_\ell}-1]\,Y^*_{\ell m}(\hat{p}) .$$

to se obvykle přepisuje užitím $\sum_m Y_{lm}(\hat{p}')Y^*_{lm}(\hat{p}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta)$

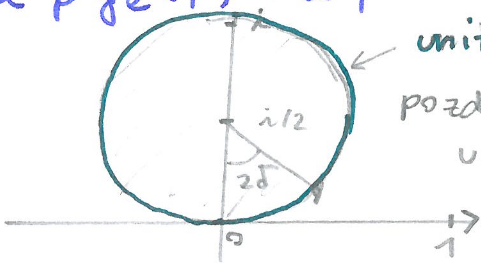
do tvaru $\boxed{f(p',p) = \sum_l (2l+1) f_l(E) P_l(\cos\theta)}$

kde $\boxed{f_l(E) = \frac{1}{2ip}\left[e^{2i\delta}-1\right]} = \frac{1}{p} e^{i\delta}\sin\delta$

pozn: – nezávisí na úhlu φ .. jen a $\hat{p}'\cdot\hat{p} = \cos\theta$

– Argand plot: $\equiv$ závislost čísla $p f_l(p)$ na p nebo E

$p f_l = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}\left[e^{2i\delta}-1\right] =$



unitarity circle

později → neelast. uvnitř.

účinný průřez $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$

$\mu = \cos\theta$

→ Integrální: $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega_{p'} = \sum_{ll'} (2l+1)(2l'+1)\cdot 2\pi \underbrace{\int_{-1}^{1} d\mu\, P_l(\mu) P_{l'}(\mu)}_{\to \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}} |f_l|^2$

ortogonalita P_l

tj $\boxed{\sigma = \sum_l 4\pi(2l+1)|f_l|^2 = \frac{4\pi}{p^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l}$

→ unitární limita = max. příspěvek parc. vlny l

---

② Stacionární rozptylové stavy (ve sfér. sym. případě)

důsl. sfér symetrie pro:

(SR_0): $(E-H_0)|p\rangle = 0$ ... A

(SR): $(E-H)|\psi\rangle = 0$ ... B

(LS): $|\psi\rangle = |p\rangle + G_0^{(+)} V|\psi\rangle$ ... C

A Opakování kvantovky pro volnou částici:

(SR_0) řeší $\phi(x) \equiv \langle\vec{x}|Elm\rangle$ ... spol. vl. v. H_0, L^2, L_z

$\to \phi(x) = \frac{A}{r}\chi(r) Y_{lm}(\hat{x})$

$U = 2mV$ později, zde $U=0$

+ H_0 ve sfér. souř. $\Rightarrow$ $\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) + p^2\right]\chi_l(r) = 0$ (SR_l)

(SR)

Řešení (SR_l) ... Ricatti-Bessel fce .. zobecnění sin, cos:

$l=0$, ... dvě LNZ řešení $\sin(pr)$, $\cos(pr)$ nebo e^{ipr}, e^{-ipr}

pro $l \neq 0$ .. zobecnění .. násl. str.

obecné ℓ $\qquad z = pr$

• $\hat{j}_\ell(z) \equiv z\, j_\ell(z) = z(-z)^\ell \left(\frac{d}{z\,dz}\right)^\ell \frac{\sin z}{z}$ … $\sin z,\ \frac{\sin z}{z} - \cos z, \dots$ (rekur. relace)

• $\hat{n}_\ell(z) \equiv (-z)\, n_\ell(z) = z(-z)^\ell \left(\frac{d}{z\,dz}\right)^\ell \frac{\cos z}{z}$ … $\cos z,\ \frac{\cos z}{z} + \sin z, \dots$

jiná LNZ řada: $\hat{h}^\pm = \hat{n} \pm i\hat{j}$ … $e^{\pm z},\ (1 \pm \frac{i}{z})e^{\pm i(z-\frac{\pi}{2})}, \dots$

asymptotika:

• $z \to 0$: $\hat{j}_\ell(z) \simeq \frac{z^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$ $\qquad n_\ell(z) \simeq \frac{(2\ell+1)!!}{z^\ell}$

• $z \to \infty$: $\hat{j}_\ell(z) \simeq \sin(z - \frac{\ell\pi}{2})$ $\quad \hat{n}_\ell(z) \sim \cos(z - \frac{\ell\pi}{2})$ $\quad \hat{h}^\pm(z) \sim e^{\pm i(z - \frac{\pi\ell}{2})}$

pozn: dá se dk, že fáze jde ke konst. pro $V \sim r^{-\alpha}$; $\alpha > 1$ .. ok pro $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$

… zpátky ad A:

vlna : $\phi(x) = \langle \vec{x} | E\ell m \rangle = N \frac{1}{r} \hat{j}_\ell(pr) Y_{\ell m}(\frac{\vec{x}}{r})$ $\qquad N$?

známý vzorec pro rozkl. rovinné vlny:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{4\pi}{pr} \sum_{\ell m} (i)^\ell \hat{j}_\ell(pr) Y_{\ell m}(\tfrac{\vec{x}}{r})}\sqrt{mp}\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{mp}} Y^*_{\ell m}(\tfrac{\vec{p}}{p})}$$

srovn S: $\quad \sum_{\ell m} \langle x | E\ell m \rangle \qquad \int \frac{1}{\sqrt{mp}} \delta(E_p - E) Y^*_{\ell m}(\hat{p}) = \int \langle E\ell m | p \rangle$

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \sum_{\ell m} \int dE \, \langle \vec{x} | E\ell m \rangle \langle E\ell m | \vec{p} \rangle$$

závěr: $\quad \langle \vec{x} | E\ell m \rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}_{\delta(p-p')\ \text{norm.}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{m}{p}}}_{\delta(E-E')\ \text{norm.}}\ \overset{\text{fáze}}{i^\ell}\ \underbrace{\hat{j}_\ell(pr) \cdot \frac{1}{r} Y_{\ell m}(\hat{r})}_{\text{už vlna (viz výše)}}$

rozklad G-fce do parc. vln:

pozn: dá se najít jako G-fce pro $(\hat{S}R_\ell)$ … řeš. s δ-fcí pr. str.

… potřeba znát Wronskián $j_\ell, n_\ell, h^\pm$ … stačí v $x \to \infty$ (nezávisí na x)

pozn: okraj. podmínky pro ^ jsou $G^{(\pm)}_{0\ell}(r, r') \to j_\ell(pr) \quad r \to 0$

$h^{(\pm)}_\ell(pr) \quad r \to \infty$

(odcházení / přicházení)

pozn: $G^{(\pm)}_{p\ell}(r, r')$ lze rovněž dostat přímou inverzí radiálního hamiltoniánu $\left[p^2 + i\varepsilon + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]^{-1}$

$$\langle \vec{x}\,|(z-H_0)^{-1}|\vec{x}\,'\rangle = \int dE \sum_{\ell m} \frac{\langle \vec{x}\,|E\ell m\rangle\langle E\ell m|\vec{x}\,'\rangle}{z-E}$$

$$= \frac{2m}{\pi r r'} \sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{x})\, Y^*_{\ell m}(\hat{x}') \int \frac{dE}{p}\, \frac{\hat{j}_\ell(pr)\,\hat{j}_\ell(pr')}{z - p^2/2m}$$

$$\to \langle \vec{x}\,|\,G_0^{(+)}(E)\,|\vec{x}\,'\rangle = \sum_{\ell m} \frac{2m}{r r'}\, Y_{\ell m}(\hat{x})\, Y^*_{\ell m}(\hat{x}') \underbrace{\boxed{\left(-\frac{1}{p}\right) h_\ell^{(+)}(pr_>)\, j_\ell(pr_<)}}_{G^0_{\ell p}(r,r')}$$

B Interagující částice

.. (SR_ℓ) ... $\psi_\ell(x) = \frac{1}{r}\, \chi_\ell(r)\, Y_{\ell m}(\hat{x})$ + poč. podm. $\chi_\ell(r) = 0$

→ wronskián ← později

plná G-fce: .. jako G_0 → $G_{\ell p}(r,r') = \frac{1}{W}\, I_\ell^{(+)}(r_>)\, R_\ell(r_<)$,

kde $R_\ell(r) \xrightarrow[r\to 0]{} j_\ell(pr)$ ... regulární řešení

$I_\ell^{(+)}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} h_\ell^{(+)}(pr)$ ... iregulární (Jostovo řešení)

C Rovnice pro parciální vlny:

$|\psi\rangle = |\phi\rangle + G_0^{(+)}\, V\, |\psi\rangle$ + dosazení:

- $\langle x|E\ell m\rangle = i^\ell \sqrt{\frac{2m}{\pi p}}\, \frac{1}{r}\, j_\ell(pr)\, Y_{\ell m}(\hat{x})$ $\equiv \langle x|\phi\rangle$
- $\langle x|E\ell m +\rangle \equiv i^\ell \sqrt{\frac{2m}{\pi p}}\, \frac{1}{r}\, \psi_{p\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\hat{x})$ $\equiv \langle x|\psi\rangle$ ... definuje $\psi_{p\ell}$ .. srovn.
- rozvoj $\langle x|G_0|x'\rangle = \sum_{\ell m}$ ... výše ⟹ (je rozdíl)

$$\boxed{\psi_{\ell p}(r) = j_\ell(pr) + \int_0^\infty dr'\, G^0_{\ell p}(r,r')\, U(r')\, \psi_{\ell p}(r')} \qquad (LS_\ell)$$