Lekce V – Analytičnost v p a E

rovnice pro parciální vlny:

(SR$_\ell$) $$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + U(r) + p^2\right]\phi_\ell(r) = 0$$

nebo

(LS$_\ell$) $$\psi_{\ell p}(r) = \hat{j}_\ell(pr) + \int_0^\infty dr'\, G^0_{\ell p}(r,r')\, U(r')\, \psi_{\ell p}(r')$$

závisí na parametru $p>0$, který má fyzikální význam délky vektoru hybnosti (nalétávající) $p = |\vec{p}| = \sqrt{2mE}$.

Matematicky: klidně $p \in \mathbb{C}$ → zajímavé fyzikální důsl.:

→ nejdříve více o vlastnostech (SR$_\ell$) a (LS$_\ell$):

(LS$_\ell$) je integrální rovnicí Fredholmova typu

Převedení na rovnici Volterrova typu:

$$\psi(r) = \hat{j}(pr) + \left(-\frac{1}{p}\right)\left(\int_0^r dr'\, \hat{j}(pr')\, U\psi\right) h^{(+)}(pr) + \left(\int_r^\infty dr' \left(-\frac{1}{p}\right) h^{(+)}(pr')\, U\psi\right) \hat{j}(pr)$$

$G = -\frac{1}{p}\, j(pr_<)\, h^{(+)}(pr_>)$ ↳ $\int_0^\infty - \int_0^r$

$$= \underbrace{\left[1 - \frac{1}{p}\int_0^\infty h^{(+)}\, U\, \psi\, dr'\right]}_{A} j(pr) + \int_0^r \underbrace{\frac{1}{p}\left(j(pr)h(pr') - j(pr')h(pr)\right)}_{g_{\ell p}(r,r')} U\, \psi\, dr'$$

def: Regulární řešení:

$$\boxed{\phi_{\ell p}(r) = \hat{j}_\ell(pr) + \int_0^r g_{\ell p}(r,r')\, U(r')\, \phi_{\ell p}(r')\, dr'} \quad (\mathrm{VR}_\ell)$$

pak díky linearitě: $\psi = A\phi$

pozor... A závisí na ψ: $A = 1 - \frac{1}{p}\int_0^\infty h^{(+)}\, U\, A\phi\, dr' \Rightarrow A = \frac{1}{1 + \frac{1}{p}\int_0^\infty h^+ U \phi\, dr'}$

definice: Jostova funkce: $$\boxed{\mathcal{J}_\ell(p) \equiv 1 + \frac{1}{p}\int_0^\infty \hat{h}^+(pr)\, U(r)\, \phi_{\ell p}(r)\, dr}$$

pak platí: $$\psi_{\ell p}(r) = \frac{\phi_{\ell p}(r)}{\mathcal{J}_\ell(p)}$$

poznámky: • $g_{\ell p}(r,r') \equiv \frac{1}{p}\left(\hat{j}_\ell(pr)\, \hat{h}^{(+)}_\ell(pr') - \hat{j}_\ell(pr')\, \hat{h}^{(+)}_\ell(pr)\right)$

... po přidání faktoru $\theta(r-r')$ je G-fce (SR$^0_\ell$)

• Jak ψ, tak ϕ řeší (SR$_\ell$) ... liší se normalizací

– přitom ϕ je reálné řešení neboť $g_\ell = \frac{1}{p}\left(j_\ell(pr)\, n_\ell(pr') - j(\cdot)\, n\right)$

↳ $h^{(+)} = n + ij$; im. části se odečtou

• <u>asymptotika $r \to 0$</u>:

pokud je $U(r)$ pro $r \to 0$ méně singulární než r^{-2} $(+\varepsilon)$

pak pro $r \to 0$ $\int_0^r$ nepřispívá, tj. $\phi_{\ell p}(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \hat{j}_\ell(pr) \simeq \frac{(pr)^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$ (A1)

→ alternativní def. regulárního řešení:

– regulární řešení (SR_ℓ) je takové, že $\phi_{\ell p}(r) \to \hat{j}_\ell(pr)$ pro $r \to 0$

• <u>asymptotika $r \to \infty$</u>

ještě jiná alternativa $g_\ell(r,r') = \frac{1}{2ip}\left[h_\ell^-(pr')h_\ell^+(pr) - h_\ell^-(pr)\, h_\ell^+(pr')\right]$

$j_\ell = \frac{h^+ - h^-}{2i}$

$$\Rightarrow \quad \phi(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{2i}(h^+ - h^-) + \frac{1}{2ip} h^+ \int_0^\infty h^- U \phi - \frac{1}{2ip} h^- \int_0^\infty h^+ U \phi$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{ \mathcal{J}_\ell(p)^* \hat{h}^{(+)}(pr) - \mathcal{J}_\ell(p)\hat{h}^{(-)}(pr) \right\} \qquad \text{(A2)}$$

$$= \mathcal{J}_\ell(p) \frac{1}{2i}\left\{ \frac{\mathcal{J}_\ell(p)^*}{\mathcal{J}_\ell(p)} \hat{h}_\ell^{(+)}(pr) - \hat{h}_\ell^{(-)}(pr) \right\} = \psi_{\ell p}(r)\, \mathcal{J}_\ell(p)$$

srovn. s (předchozí lekce):

$$\psi_{\ell p}(r) \xrightarrow{r\to\infty} e^{i\delta_\ell} \sin\left(pr - \frac{\pi}{2}\ell + \delta_\ell(p)\right) = \frac{i}{2}\left[\hat{h}_\ell^-(pr) - S_\ell(p)\hat{h}^+\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_\ell(p) \equiv e^{2i\delta_\ell(p)} = \frac{\mathcal{J}_\ell^*(p)}{\mathcal{J}_\ell(p)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{J}_\ell(p) = |\mathcal{J}_\ell| \cdot e^{-i\delta_\ell(p)}}$$

• <u>role normalizace</u>

→ řešení ϕ (regulární) (SR_ℓ) lze přímo integrovat z podm. (A1).
(a to i numericky) pro postupně se zvětšující r

→ řešení ψ musíme získat nejprve integrací (SR) a poč. podm. $\psi(r=0)=0$,
ale správnou normalizaci (A2) dostaneme až relace z limit $r \to \infty$

⇒ poměr ψ/ϕ netriviální ... obsahuje S!

• postup se dá obrátit ... místo $r: 0 \to \infty$ udělat $r: \infty \to 0$

<u>Jostovo řešení</u>: def $\chi^{(\pm)}_{\ell,p}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} h_\ell^{(\pm)}(pr)$ a řeší (SR_ℓ)

opakování postupu výše (LS_ℓ) ⇒ $\boxed{\chi^{(\pm)}(r) = h^{(\pm)}(pr) - \int_r^\infty g_\ell(r,r')\, U \chi^\pm \, dr'}$

$\chi^+ ; \chi^-$ .. lnz řešení (SR_ℓ) → lze vyjádřit ϕ_ℓ:

$$\phi_{\ell p}(r) = \frac{i}{2}\left[\mathcal{J}_\ell \chi^- - \mathcal{J}_\ell^* \chi^+\right] \quad \Rightarrow \quad \text{Wronskián: } W(\chi^+, \phi) = p\, \mathcal{J}_\ell(p)$$

⇒ plná G-funkce:
$$G^{(\pm)}_{\ell,p}(r,r') = -\frac{1}{p\,\mathcal{J}_\ell(p)}\, \phi_{\ell p}(r_<)\, \chi^{(\pm)}_{\ell p}(r_>)$$

(3D g-fce ... stejný vzorec jako $G^{(0)}$ ... $\sum_{\ell m} \frac{2}{rr'} Y_{\ell m}(\hat{x}) Y^*_{\ell m}(\hat{x}') \, G^{(\pm)}_{\ell p}(r,r')$)

nefyzikální hodnoty $p \in \mathbb{C}$

- Volterrova rovnice (VR$_\ell$) lze řešit iteracemi (jako Born)

... n-tý člen $\sim \int_0^r dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \dots \int_0^{r_{n-1}} dr_n\, g(r,r_1)U(r_1)\dots g(r_{n-1},r_n)U(r_n)\phi(r_n)$

konvergence viz Taylor ... podstata: $\|\uparrow\| \le \frac{1}{n!}\|gU\|^n$

$\to$ lepší konvergence než Born $\psi = \sum_n (GU)^n|j\rangle \dots = \frac{\phi}{\mathcal{J}(p)}$

... důvod ... nuly $\mathcal{J}(p)$

- Analytické prodlužování: (pro rozumný U .. obvyklé podm.)

VĚTA: $\boxed{\phi_{\ell p}(r) \text{ je analytickou fcí } p \in \mathbb{C} \text{ v celém } \mathbb{C}}$

- prodlužování Jostovy funkce:

$$\mathcal{J}_\ell(p) \equiv 1 + \frac{1}{p}\int_0^\infty \underbrace{h_\ell^{(+)}(pr)}_{\sim e^{ipr}}\, U(r)\, \underbrace{\phi_{\ell p}(r)}_{\sim e^{|\mathrm{Im}\,p| r}}\, dr$$

$\to \int$ existuje v horní polor. $\mathrm{Im}\, p > 0$

VĚTA: $\mathcal{J}_\ell(p)$ je analytickou fcí na fyzikálním listu $\mathrm{Im}\, p > 0$ prodloužitelnou na $p > 0$

- prodlužování S-matice: $S_\ell(p) = \mathcal{J}_\ell^*(p)/\mathcal{J}_\ell(p)$

.. problém: $f(z) = z^*$ není analytická funkce

Ale: – na reálné ose platí: $\mathcal{J}_\ell^*(p) = \mathcal{J}_\ell(-p)$

DK: 1) $\phi_{\ell -p}(r)$ splňuje stejnou (SR$_\ell$) jako $\phi_{\ell p}(r)$ ... závisí na p^2, ale poč. podm. $\sim \frac{(-pr)^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}$ $\Rightarrow$ $\phi_{\ell -p}(r) = (-1)^{\ell+1}\phi_{\ell p}(r)$ .. reálné

2) $h_\ell^{(+)}(-rp)$ splňuje (SR$_\ell^0$) .. opět stačí ověřit okraj. podmínku

$$h_\ell^{(+)}(-pr) \sim e^{i(-pr-\frac{\pi}{2}\ell)} = e^{-i(pr-\frac{\pi}{2}\ell)} \cdot e^{-i\pi\ell} = \left[h_\ell^{(+)}(pr)\right]^*(-1)^\ell$$

tj. $\mathcal{J}_\ell(-p) = 1 + \frac{1}{-p}\int_0^\infty h_\ell^{(+)}(-pr)U(r)\phi_{\ell(-p)}(r)\,dr = (\mathcal{J}_\ell(p))^*$

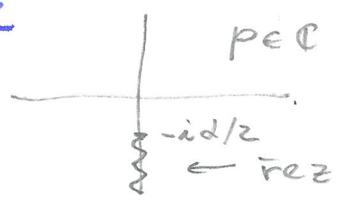
analytické prodloužení této relace je $[\mathcal{J}_\ell(\vec{p})]^* = \mathcal{J}_\ell(-p)$

$\to$ analytické prodl. vzorce pro $S_\ell(p) = \mathcal{J}_\ell(-p)/\mathcal{J}_\ell(p)$

pozn: – potenciál konečného dosahu $\to$ $\mathcal{J}_\ell(p)$ analyt. v celém $p \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $S_\ell(p)$ analytická v $\mathbb{C}$

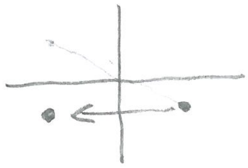
– Yukawa $e^{-\alpha r}/r$:



- obecně čím delší dosah potenciálu tím je anal. chování v dolní polorovině horší
- to je ale nefyzikální → vždy můžu oříznout např. na vzdál. 1 m.

Význam nul. Jostovy funkce

pozn: nula $\mathcal{J}_\ell(p)$ → pól S matice



$$[\mathcal{J}_\ell(p^*)]^* = \mathcal{J}_\ell(-p) \to \mathcal{J}_\ell(p) = [\mathcal{J}_\ell(-p^*)]^*$$

tj nuly Jostovy funkce se vyskytují v párech $p, -p^*$:

(1) nuly v horní polorovině (≡ na fyzikálním listě):

$\mathcal{J}_\ell(p)=0 \Rightarrow$ pro $r\to\infty$ $\phi_{\ell p}(r) \sim h^{(+)}(pr) \sim e^{-\mathrm{Im}\,p\cdot r}$

$\Rightarrow \phi_{\ell p}(r)$ je z $L^2(\mathbb{R})$ a řeší (SR_ℓ) $\Rightarrow$ vázaný stav

+ Hermiticita H $\Rightarrow E=p^2/2m<0$ je reálná

závěr: $\boxed{\text{Nuly } \mathcal{J}_\ell(p)=0 \text{ v horní polorovině leží na im. ose a odpovídají vázaným stavům}}$

(2) nuly v dolní polorovině nemají podobné omezení.

def: • Nuly s $\mathrm{Re}\,p=0$, $\mathrm{Im}\,p<0$ nazýváme virtuální stavy
(sice $E=p^2/2m<0$; ale $\phi(r) \xrightarrow{r\to\infty} e^{+|\mathrm{Im}\,p|\cdot r}$)

• Nuly s $\mathrm{Im}\,p<0$ $\mathrm{Re}\,p\neq0$ se vyskytují v párech a nazýváme je rezonance

Analytičnost v energii: $E=p^2/2m$

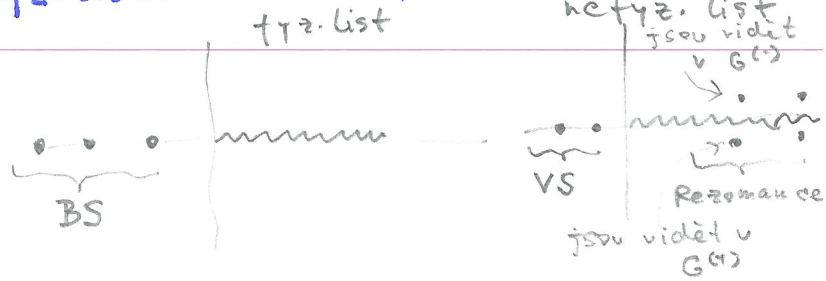
→ rozptylové veličiny se stávají dvojznačné ... jednoznačné na Riemannově ploše $p=\sqrt{z}$

→ možná nomenklatura: $E=|E|e^{i\varphi}$; $\varphi\in\langle 0,4\pi\rangle$, kde

$\varphi\in\langle 0,2\pi\rangle$ odpovídá fyz. listu ... horní polorovina v p

$\varphi\in\langle 2\pi,4\pi\rangle$ odpovídá nefyz. listu .. dolní polorovina v p

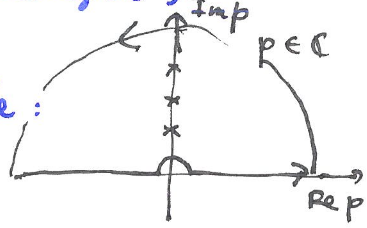
$\varphi=0;\ 2\pi$ je řez



+ ukázat model

Levinsonův teorém

Pro fázové posunutí $\delta_\ell(E)$ platí $\delta_\ell(0)-\delta_\ell(\infty)=\pi n_\ell$,
kde n_ℓ je počet vázaných stavů s momentem hybnosti ℓ
(v případě s-vlny se přičte $\frac{1}{2}\pi$ pokud $\mathcal{J}_{\ell=0}(0)=0$, tj. pokud existuje vázaný stav s nulovou energií)



DK: vyšetřujeme $I=\oint dp\,\frac{\mathcal{J}_\ell'(p)}{\mathcal{J}_\ell(p)}$ na kontuře:

→ integrand je analyt. fce v horní polor. kromě jednoduchých pólů ve váz. stavech

→ Reziduová věta → $I = 2\pi i\, n_\ell$

.. integrand přes polokružnice je třeba vyšetřovat zvlášť

→ horní polokruh vymizí

→ malý kroužek přispěje $\frac{\pi}{2}$ pokud $\mathcal{J}_\ell(0)=0$ .. a to jen v případě s vlny ... v $\ell>0$ je pól ↑ dvojnásobný (viz lekce VI)

→ Integrace po reálné ose:

$$I = \int_0^\infty\left(\frac{\mathcal{J}_\ell'(p)}{\mathcal{J}_\ell(p)} + \frac{\mathcal{J}_\ell'(-p)}{\mathcal{J}_\ell(-p)}\right)dp = \ln\mathcal{J}_\ell(\infty)-\ln\mathcal{J}_\ell(0+)+\ln\mathcal{J}_\ell(0-)-\ln\mathcal{J}_\ell(-\infty)$$

přičemž $\mathcal{J}_\ell(p)=|\mathcal{J}_\ell|\,e^{-i\delta(p)}$ $\quad\mathcal{J}_\ell(-p)=\mathcal{J}_\ell(p)^*=|\mathcal{J}_\ell|\,e^{+i\delta(p)}$

$$I = 2i\left(\delta_\ell(0)-\delta_\ell(\infty)\right)$$

$$\Rightarrow\quad I/2i = \delta_\ell(0)-\delta_\ell(\infty) = \pi n_\ell$$

• pozn: podívejte se na obrázky Riem. plochy $E=\frac{p^2}{2m}$

→ $\mathcal{J}_\ell(p)=\mathcal{J}_\ell(\sqrt{2mE})$ ... jednoznačná fce na Rieman ploše $\sqrt{z}$

... dva listy ...
- váz. stavy: fyz. list $\mathrm{Im}\,p>0$ ... tj. $p=|p|e^{i\varphi}$ $\varphi\in(0,\pi)$
  → $E=|E|e^{i\varphi}$ $\varphi\in(0,2\pi)$
- virt. stavy, rezonance: nefyz. list $\mathrm{Im}\,p<0$ ... $p=|p|e^{i\varphi}$ $\varphi\in(\pi,2\pi)$
  → $E=|E|e^{i\varphi}$ $\varphi\in(2\pi,4\pi)$

Rieman surface for the energy

$$E = p^2/2m = |E| \cdot e^{i\varphi}$$