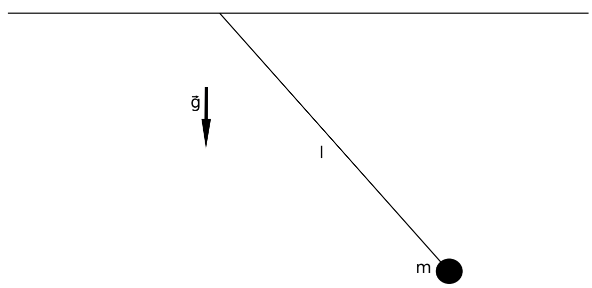
Úlohy pro samostudium – IV

Zadáno: 26.4.2020 **Odevzdat do: 6.5.2020**

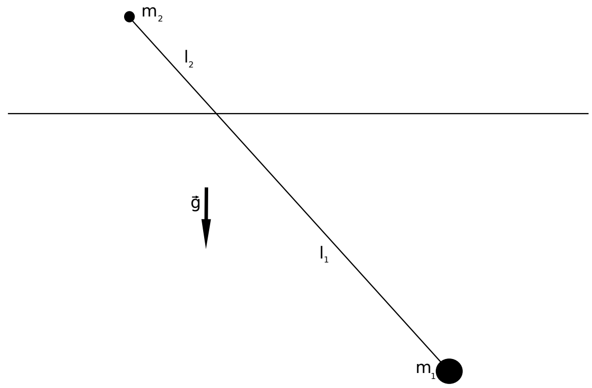
Lagrangeovy rovnice II. druhu

Určete nejprve lagranžián **matematického kyvadla** – jde o hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na konci nehmotné přímé tyčky o délce l, jejíž opačný konec je fixován v prostoru. Celý systém se nachází v homogenním gravitačním poli charakterizovaném konstantním zrychlením $\vec{g}$. Předpokládejme dále, že pohyb systému probíhá pouze v jediné svislé rovině určené gravitačním polem.



- Kolik stupňů volnosti má tato soustava, neboli kolik musím zadat nezávislých číselných hodnot, abych určil její konfiguraci čili polohu tohoto hmotného bodu?
- Jaké zobecněné souřadnice budou nejvhodnější pro lagranžovský popis soustavy, neboli jaké souřadnice nejlépe vystihují vazbu zamezující našemu hmotnému bodu ve volném pohybu celým prostorem?
- Vyjděte nyní ze vhodně zvolených kartézských souřadnic a napište v nich kinetickou a potenciální energii soustavy T a V. Bez újmy na obecnosti zvolte gravitační pole rovnoběžné s osou z a mířící proti ní, neboli $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ $(g > 0)$. Přepište tyto výrazy do zobecněných souřadnic, které jste si vybrali v předchozím bodu.
- Zapište lagranžián soustavy $\mathcal{L} = T - V$.
- Nyní zformulujte Lagrangeovy rovnice II. druhu. Kolik jich bude?
- Na jakých proměnných lagranžián explicitně závisí? Můžeme na základě toho určit nějaký integrál pohybu, čili veličinu, která zůstává konstantní během celého vývoje soustavy a nezávisí explicitně na čase?
- Abychom získané rovnice dokázali explicitně vyřešit pomocí elementárních funkcí, musíme je linearizovat, čili předpokládat, že řešení se během celého vývoje příliš neodchýlí od nějakého známého přesného řešení. Za toto výchozí řešení nyní zvolíme situaci, kdy hmotný bod visí nehybně přímo pod bodem závěsu. Náš předpoklad tedy zní $\varphi(t) \ll 1$, kde $\varphi(t)$ je odchylka tyčky od svislice. Proveďte rozvoj nalezené rovnice do nejnižšího řádu ve $\varphi(t)$.
- Jaký fyzikální systém popisuje linearizovaná rovnice? Jak vypadá její řešení?

Nyní zkoumejme o něco zajímavější **dvojzvratné kyvadlo**: jde o dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 upevněné na nehmotné přímé tyčce ve vzdálenostech l_1 a l_2 od bodu tyčky, který opět fixujeme v prostoru. Celý systém je zas v homogenním gravitačním poli charakterizovaném konstantním zrychlením $\vec{g}$ a znovu předpokládejme, že pohyb systému probíhá pouze ve svislé rovině.



- Určete opět počet stupňů volnosti soustavy.
- Jaké jsou nejvhodnější zobecněné souřadnice?
- Zvolte si kartézské souřadnice a napište kinetickou a potenciální energii. Přepište je do zobecněných souřadnic.
- Zapište lagranžián soustavy $\mathcal{L} = T - V$.
- Sestavte Lagrangeovy rovnice II. druhu. Jakého řádu jsou tyto diferenciální rovnice?
- Rovnice linearizujte kolem vhodně zvoleného přesného řešení a vyřešte je v nejnižším řádu aproximace.
- Nyní diskutujme jednotlivé případy. Existuje řešení, které jste nalezli, vždy? Co se stane, pokud $m_1 l_1 - m_2 l_2 = 0$? Co představuje koeficient stojící u druhé časové derivace úhlu? A koeficient u $g\varphi$? Tento obecný případ jistě musí limitně obsahovat i matematické kyvadlo. Kde je skryto?

Hodit se vám mohou poznámky ke kyvadlu, které jsme vám poslali (str. 6). V posledním bodě vám napoví také matematika: my, fyzikové, umíme například odmocňovat pouze kladná čísla...