Teorie grup – úvod

- grupa je obecně množina nějakých zcela abstraktních prvků, mezi nimiž je definována binární operace specifických vlastností
- jedním z našich hlavních cílů bude naučit se reprezentovat tyto abstraktní objekty uchopitelnějšími (typicky maticemi)
  - možností, jak to udělat je ∞, ale $\exists$ "něco jako úplná sada" (pro kon. grupy konečná) reprezentací, která v zásadě plně zachycuje strukturu grupy
- z hlediska fyziky je teorie grup především mat. metoda k systematickému studiu symetrií a jejich důsledků

- symetrie – typicky invariance vůči nějakému typu transformací:
  - geometrické: translace, rotace, zrcadlení, parita ($x_i \to -x_i$)
  - translace v čase
  - abstraktnější koncepty potkáváme v částicové fyzice

- užití/důsledky teorie grup:

  1, systematický nástroj k hledání dynamických zákonů a zákonů zachování (teorém Noetherové)

  2, nástroj k jejich řešení:
    - omezení na přípustná řešení
      $\circledast$ $\left[(T + V(x))\psi(x) = E\psi(x) \,;\; V(x) = V(-x) \Rightarrow \psi(x) = \pm\psi(-x) \right]$
    - nalezení úplných sad pozorovatelných (kvant. čísel; souvisí se zákony zachování)
    - rozklad prostoru možných řešení na nezávislé podprostory (viz $\circledast$) $\Rightarrow$ snížení dimenze problému

  3, výběrová pravidla pro povolené/zakázané fyzikální procesy

<u>Def:</u> <u>Grupa</u> je množina G s binární operací $(G, \cdot)$, pro kterou platí $\forall a,b,c \in G$:

1, $a \cdot b \in G$ (uzavřenost)

2, $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita)

3, $\exists e$: $ea = ae = a$ (jednotkový/neutrální prvek)

4, $\forall a \in G \ \exists a^{-1}$: $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (inverzní prvek)

- e a a^{-1} jsou určeny <u>jednoznačně</u>:

  e: Nechť e_1, e_2 jsou 2 jedn. prvky (různé) $\Rightarrow$

  $$e_1 e_2 = e_1 \quad a \quad e_1 e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2 \quad \lightning$$

  a^{-1}: Nechť b_1, b_2 jsou 2 různé inv. prvky k a $\Rightarrow$

  $$ab_1 = e = ab_2 \quad / a^{-1} \cdot \quad \Rightarrow b_1 = a^{-1} = b_2 \quad \lightning$$

- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$: $abb^{-1}a^{-1} = e$

<u>Příklady</u>

1, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ $\quad e = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$\rightarrow$ souvislá podgrupa $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

2, $(\mathbb{R}, +)$ $\quad e = 0$, $a^{-1} = -a$

0) $S_n \equiv Sym(n)$ - grupa permutací n-prvkové množiny

3, $GL(n, \mathbb{R}/\mathbb{C})$ ... $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ regulární matice $n \times n$ s operací mat. násobení

$\rightarrow$ podgrupy

$O(n)$ ... $A^T A = \mathbb{1}$

$\cup$

$SO(n)$ ... $A^T A = \mathbb{1}$ & $\det A = 1$

$U(n)$ ... $A^+ A = \mathbb{1}$

$\cup$

$SU(n)$ ... $A^+ A = \mathbb{1}$ & $\det A = \mathbb{1}$

$\boxed{\text{! důležité - reprezentace}}$

4, grupa symetrie $\equiv$ <u>grupa transformací</u>, vůči kterým je daný objekt/systém invariantní (rotace, posunutí, ...)

$\rightarrow$ tvoří grupu: ~~skla~~ složením 2 trcí dostaneme trci, $\exists$ inverzní transformace, ...

4a) Eukleidova grupa transformací, zachovávajících vzdálenost bodů

• $E(n)$, $ISO(n)$
• grupa sym. n-dim Euclid. prostoru

$$\vec{r}\,' = A\vec{r} + \vec{b} \quad , \; A \in O(3)$$

• lze ukázat, že každá konečná podgrupa $E(n)$ je podgrupou $O_T(3)$ ... rotace kolem bodu T (Litzman, S., str. 22, věta 1.3.5)

⇓

4b) bodové grupy - konečné podgrupy $E(3)$
-> zachovávají vzdálenost bodů a pozici jednoho bodu v prostoru
-> grupy symetrií molekul

4c) krystalografické grupy - 4b) + konečná posunutí

4d) Lorentzova grupa $O(3,1) \subset$ Poincarého grupa
-> Poincaré: grupa # symetrií spec. relativity / Mink. prostoročasu (izometrie - zachovávají ds)
• rotace v prostoru
• boosty (Lor. transf. neobsahující rotaci) $\Big\}\; O(3,1)$
• translace v prostoru a čase

Def: (Řád grupy)
Grupa G je konečná, má-li konečný počet prvků. Ten nazýváme řád grupy a značíme $\#G$ nebo $|G|$.

• nekonečné grupy mohou být diskrétní (mají spočetně mnoho prvků - např. grupy 4c), spojité nebo po částech spojité (grupy mající více komponent souvislosti - např. $O(3)$) - topologické a Lieovy grupy

• spojité: 1-3, 4a, 4d (Lieovy)

• diskrétní: 4b, 4c

$\boxed{\text{Multiplikační tabulka}}$ – úplné určení konečné grupy

Př: 2-prvková grupa $\{e, a\} : a^2 = e$ (abstraktní)

	e	a
e	e	a
a	a	e

(obecně MT:

	e	a	b	...
e	ee	ea	eb	...
a	ae	aa	ab	...
b	be	ba	bb	...
⋮				

)

- abstraktní grupa (množina s nespecifikovanou binární operací)

- konkrétní realizace:
  - → $(\{1, -1\}, \cdot) = G$
  - → $Z_2 = (\{0, 1\}, + \bmod 2)$
  - → bodové grupy $C_s = \{e, \sigma\} \sim C_i = \{e, i\} \sim C_2 = \{e, C_2\}$ (zrcadlení v rovině σ; inverze v poč.; rotace o 180°)
  - → $\left(\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}, \text{mat. násobení}\right) = M$
  - → $S_2 = \left(\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}, \text{skládání permutací}\right)$

⇒ všechno to jsou izomorfní grupy (různé realizace téže abstraktní grupy):

$$G \sim Z_2 \sim C_s \sim C_i \sim C_2 \sim M \sim S_2$$

Def: Izomorfismus mezi grupami $(G_1 \sim G_2)$ je vzájemně jednoznačné přiřazení $\varphi: G_1 \to G_2$, zachovávající grupovou operaci:

$$\varphi(a_1) = a_2 \;\&\; \varphi(b_1) = b_2 \Rightarrow \varphi(a_1 b_1) = \varphi(a_1)\varphi(b_1) = a_2 b_2$$

$$\varphi: a_1 \mapsto a_2 \;\&\; b_1 \mapsto b_2 \Rightarrow a_1 b_1 \mapsto a_2 b_2$$

Def: Abelova grupa (abelovské, komutativní)

$$\forall a, b \in G : ab = ba$$

- řád prvku v kon. grupě je dobře def.: $p > q \;\&\; a^p = a^q$ → $/p = q + n/$ → ⇒ $a^{n+q} = a^n a^q = a^q$ ⇒ $a^n = e$

Def: Cyklická grupa generovaná prvkem a je množina $\{a^k : k \leq n$ celé a n je nejmenší číslo takové, že $a^n = e$: n je řád prvku$\}$

- $\forall$ cyklické grupy jsou abelovské
- 3- a 5-ti prvkové grupy jsou pouze cyklické
- 4-prvkové: cyklická C_4 a C_{2v} $(H_2O) \sim D_2 \sim C_{2h}$

C_4:

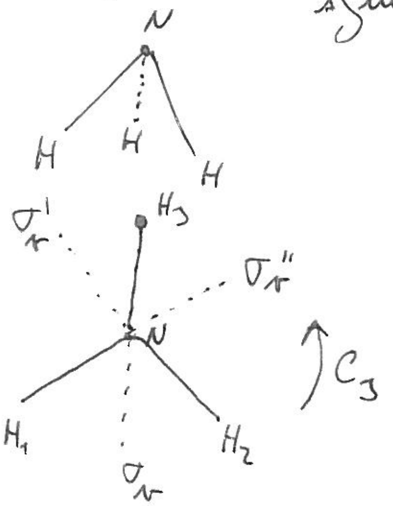
e	a	b	c
a	b	c	e
b	c	e	a
c	e	a	b

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

$\sim C_{2v} = \{E, C_2, \sigma_v, \sigma_d\}$

$\Rightarrow$ obě abelovské

- nejjednodušší neabelovská grupa je 6-ti prvková grupa izomorfní C_{3v} - grupa sym. NH_3 $\equiv$ při operacích symetrie přejdou ekvivalentní atomy na sebe



E	C_3	C_3^2	σ_v	σ_v'	σ_v''
C_3	C_3^2	E	σ_v'	σ_v''	σ_v
C_3^2	E	C_3	σ_v''	σ_v	σ_v'
σ_v	σ_v''	σ_v'	E	C_3^2	C_3
σ_v'	σ_v	σ_v''	C_3	E	C_3^2
σ_v''	σ_v'	σ_v	C_3^2	C_3	E

- ostatní D.Cv.

$$C_3 \sigma_v = C_3 \begin{pmatrix} & 3 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \end{pmatrix} = \sigma_v'$$

$$\sigma_v \sigma_v' = \sigma_v \begin{pmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{pmatrix} = C_3^2$$

$$\sigma_v C_3 = \sigma_v \begin{pmatrix} & 2 & \\ 3 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{pmatrix} = \sigma_v''$$

$\Rightarrow$ izomorfní $Sym(3)$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ... transpozice $\parallel$

$E \mapsto I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma_v \mapsto (1,2)$

$C_3 \mapsto (132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma_v' \mapsto (1,3)$

$C_3^2 \mapsto (123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma_v'' \mapsto (2,3)$

- $SO(2)$ abelovská, ale $SO(3)$ ne

Věta 1: (o přeuspořádání)

Pro $\forall b \in G$ obsahují množiny $\{ab / a \in G\}$ a $\{ba / a \in G\}$ právě jednou každý prvek z G.

(Neboli v každém řádku i sloupci multiplikační tabulky je každý prvek právě jednou.)

Dk: • Nechť $c \in G \Rightarrow \exists a = b^{-1}c \Rightarrow c = ba \Rightarrow c \in \{ba / a \in G\}$

Nechť $\exists a_1 \neq a_2 : ba_1 = ba_2 \Rightarrow / b^{-1} \cdot / \Rightarrow a_1 = a_2$ ↯

• pro $\{ab\}$ stejně $\boxtimes$

• není postačující podmínka pro "legalitu" mult. tabulky – nezaručuje asociativitu!

PODGRUPY

Def: Podgrupa je podmnožina prvků grupy, která je sama o sobě grupou se stejnou binární operací

$\Rightarrow$ uzavřenost vůči $\circ$, existence e a a^{-1}

Př: 1, $C_3 = \{E, C_3, C_3^2\} \subset C_{3v}$; $C_s = \{E, \sigma\} \subset C_{3v}$

2, $SO(2) \subset SO(3)$ ... rotace kolem jedné pevně zvolené osy

Def: (řád prvku)

Pro každý prvek kon. grupy $\exists n : a^n = e$, které nazveme řád prvku.

(Dk: Násobím a samo se sebou $\Rightarrow$ v konečné grupě musím po čase dostat totéž: $p > q$ & $a^p = a^q \Rightarrow / p = q + n / \Rightarrow a^{n+q} = a^n a^q = a^q$

$\Rightarrow a^n = e$

$\Rightarrow \mathcal{Y} = \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$ je cyklická podgrupa generovaná prvkem a.

• viz $C_3, C_s \subset C_{3v}$

<u>Lemma</u>: Neprázdná podmnožina $H \subset G$ je podgrupou G
$\iff gh^{-1} \in H \quad \forall g, h \in H$

<u>Dk</u>: $\Rightarrow$| zřejmé (h^{-1} existuje v H a H je uzavřená vůči $\circ$)

<u>$\Leftarrow$</u>| ověříme axiomy grupy:

3, $h = g \Rightarrow gg^{-1} = e \in H$

4, $g = e \Rightarrow eh^{-1} = h^{-1} \in H$

1, $h^{-1} \in H \Rightarrow g(h^{-1})^{-1} = gh \in H$ $\boxtimes$

2, asociativita jasná

<u>Věta 2</u>: Průnik dvou podgrup G je opět podgrupou G.

<u>Dk</u>: • $H_1, H_2 \subset G$ podgrupy $\Rightarrow e \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

• $g, h \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow$ /jsou to podgrupy/ $\Rightarrow h^{-1} \in H_1 \cap H_2$

& $gh^{-1} \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow$ /lemma/ $\boxtimes$

<u>Levé a pravé rozkladové třídy</u> (left/right cosets)

<u>Def</u>: Je-li H podgrupa G, pak množinu $gH = \{gh \mid h \in H\}$ (resp. Hg) nazveme <u>levou</u> (resp. pravou) <u>třídou podle podgrupy H</u>.

• g pevné, h prochází celou H

• nejedná se nutně o podgrupy, pokud neplatí $g \in H$ a tedy $gH = Hg = H$ ($\Leftarrow$ věta o přeuspořádání)

<u>Lemma</u>: 1, Každý prvek $g \in G$ patří do nějaké levé třídy podle H

2, Je-li H konečná řádu $\#H$, potom gH obsahuje právě $\#H$ prvků $\forall g \in G$.

3, Dvě levé třídy podle H jsou buď identické nebo disjunktní

4, $g' \in gH \Rightarrow g'H = gH$

Dk: 1, $g \in G \Rightarrow g = ge$ & $e \in H \Rightarrow g \in gH$

2, $h \neq h'$ & $gh = gh' \Rightarrow / g^{-1} \cdot / \Rightarrow h = h'$ ↯ (věta o přeusp.)

3, nechť $gh = g'h'$ je spol. element gH a $g'H$; $h, h' \in H$

$\Rightarrow (g')^{-1} g = h' h^{-1} \Rightarrow (g')^{-1} g \in H \Rightarrow$ / přeuspořádání /

$\Rightarrow (g')^{-1} g H = H \Rightarrow / g' \cdot / \Rightarrow gH = g'H$

4, $g' \overset{(1)}{\in} g'H$ & $g' \in gH \overset{(3)}{\Rightarrow} g'H = gH$ $\boxtimes$

Věta 3 (Lagrangeova)

Řád konečné grupy G je dělitelný počtem prvků lib. podgrupy H. Číslo $m = \#G / \#H$ se nazývá <u>index podgrupy</u> H v G.

Dk: • nechť $\exists$ m různých levých tříd podle H

$\Rightarrow (2)$ každá obsahuje $\#H$ prvků
$\Rightarrow (3)$ nemají žádný společný prvek
} $\Rightarrow$ celkem obsahují $m \#H$ prvků

$\Rightarrow (1)$ každý prvek G patří do nějaké třídy $\boxtimes$

$\Rightarrow \#G = m \#H$

Př: • $\nexists$ jiná než cyklická 5-ti prvková grupa

($\Leftarrow$ musel by $\exists$ prvek řádu < 5 $\Rightarrow$ generoval by cykl. podgrupu řádu < 5 a ten by řád dělil 5 ↯)

e	a	b	c	d
a	e	c	d	b
b	c	d	a	e
c	d	e	b	a
d	b	a	e	c

• vyhovuje větě o přeusp. ale obsahuje 2-prvkovou podgrupu $\{e, a\} \Rightarrow$ ↯

• jak je to možné?

$(ab)c = cc = b \neq a(bc) = (aa) = e$

$\Rightarrow$ není to grupa

• $C_3 = \{E, C_3, C_3^2\} \subset C_{3v} \Rightarrow \sigma_v C_3 = \{\sigma_v, \sigma_v'', \sigma_v'\}$

$= \sigma_v' C_3 = \sigma_v'' C_3$

$\#C_{3v} = 6, \ \#C_3 = 3$

$C_3 C_3 = \{C_3, C_3^2, E\}$

$\Rightarrow C_{3v} = \sigma_v C_3 + C_3 C_3$

TŘÍDY SDRUŽENÝCH PRVKŮ (conjugacy classes)

<u>Def:</u> $g_1 \in G$ je sdružený s $g_2 \in G$ ($g_1 \sim g_2$), pokud
$$\exists h \in G : g_2 = h g_1 h^{-1}$$

• jedná se o <u>relaci ekvivalence</u> (reflexivita $a \sim a$, symetrie $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$, tranzitivita $a \sim b \,\&\, b \sim c \Rightarrow a \sim c$)
$\Rightarrow$ rozklad grupy na...

<u>Def:</u> <u>Třídy sdružených prvků</u> ke g:
$$C_g = (g) = \{ h g h^{-1} \mid h \in G \}$$

• libovolný prvek (g) generuje stejnou třídu

<u>Lemma</u>
1, Každý prvek G patří do nějaké třídy.
2, Žádný prvek nemůže být ve dvou třídách.
3, e tvoří vždy samostatnou třídu $(e) = \{e\}$
4, Je-li G abelovská, potom každý prvek tvoří samostatnou třídu.

<u>Dk:</u> Dcv.

<u>Věta 4:</u> Počet prvků lib. třídy (g) dělí řád grupy G.

<u>Dk:</u> • $g_j \in (g)$ libovolné $\Rightarrow H = \{ h \in G \mid g_j h = h g_j \}$ je podgr.:
$l, h \in H \Rightarrow (l h^{-1}) g_j (l h^{-1})^{-1} = l h^{-1} g_j h l^{-1} = g_j \Rightarrow l h^{-1} \in H$ ✓

• nechť $t_k H$ je levá rozklad. třída podle H, $\tau_1 \in t_k H$
$\Rightarrow \tau_1 g_j \tau_1^{-1} = t_k h_1 g_j h_1^{-1} t_k^{-1} = / h_1 \in H / = t_k g_j t_k^{-1} = g_k \in (g)$
$\Rightarrow \forall$ prvky z $t_k H$ generují z g_j tentýž prvek z (g)

• máme celkem $m = \#G / \#H$ tříd, které generují m různých (*) prvků z (g); protože ale $\forall$ prvky G patří do nějaké $t_k H$ a každý prvek z (g) dostanu z g_j sdružením nějakým prvkem z G
$$\Rightarrow \#(g) = m = \frac{\#G}{\#H} \quad \boxtimes$$

(*) Nechť $t_j H \neq t_k H$ &
$t_j g_j t_j^{-1} = t_k g_j t_k^{-1} \Rightarrow t_k^{-1} t_j g_j t_j^{-1} t_k = g_j$
$\Rightarrow t_k^{-1} t_j \in H \Rightarrow t_j \in t_k H$ ↯