Př: (třídy sdruž. prvků)

$C_{3v} \Rightarrow (E) = \{E\}, \; (C_3) = \{C_3, C_3^2\}, \; (\sigma_v) = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

(Dok.)

- geometrický náhled: • roviny zrcadlení odpovídající $\sigma_v, \dots$ převedeme na sebe pomocí operací z grupy, konkrétně C_3, C_3^2 : $C_3 \sigma_v C_3^{-1} = \sigma_v''$ + obrázek

  • $C_3^2 = C_3^{-1}$ převedeme na C_3 pomocí σ_v (změna orientace báze, "rotace je axiální vektor")

NORMÁLNÍ PODGRUPA, FAKTOROVÁ GRUPA

Def: $H \subset G$ je <u>normální podgrupa</u> (invariantní podg., normal divisor), pokud platí

$gHg^{-1} \in H \;\; \forall g \in G \; \forall h \in H \quad \Leftrightarrow \quad gHg^{-1} \subset H \;\; \forall g \in G$

- nutně potom platí $gHg^{-1} = H$ (teorém o přeuspořádání)

  $\Rightarrow \boxed{gH = Hg}$ (samosdružená podgrupa)

  $\Rightarrow$ pro normální podgrupu jsou levé a pravé rozkl. třídy stejné

Def: <u>Centrum grupy</u> je invar. podgrupa $Z = \{h \in G \mid hg = gh \;\forall g \in G\}$

Def: Grupa je <u>prostá</u> (simple), pokud nemá žádnou netriv. normální podgrupu. Je <u>poloprostá</u> (semi-simple), pokud nemá netriv. abelovskou normální podgrupu.

Věta 5: H je normální podgrupa G $\Leftrightarrow$ H sestává pouze z kompletních tříd sdruž. prvků.

Dk: $\Leftarrow$/ zřejmé

$\Rightarrow$/ • nechť $h \in H$ a $h \sim g \in G \Rightarrow \exists a \in G: g = aha^{-1}$

$\Rightarrow g \in H \Rightarrow$ celá (h) náleží do H ☒

Def: Součin levých rozklad. tříd podle normální podgrupy: $(g_1 H)\cdot(g_2 H) \equiv (g_1 g_2) H$ (*)

- definice je smysluplná: pro $\forall$ zástupce tříd na LHS dostáváme na RHS stejnou třídu; symbolicky:

$$(g_1 H)\cdot(g_2 H) = /Hg_2 = g_2 H/ = g_1 H \cdot H g_2 = /\text{přeusp.}/$$
$$= g_1 H g_2 = g_1 g_2 H$$ (NB: všude využíváme asociativnost)

- Dcv: explic. důkaz "prvek po prvku"

$$(g_1 H)\cdot(g_2 H) \subset (g_1 g_2) H \quad \& \quad (g_1 g_2) H \subset (g_1 H)\cdot(g_2 H)$$
$$\Leftrightarrow \{g_1 h g_2 h' \,|\, h, h' \in H\} = \{g_1 g_2 h \,|\, h \in H\}$$ (*)

Def: Faktorová grupa (quotient group)

Označme $G/H = \{gH \,|\, g \in G\}$ levý (stejně pro pravý) rozklad na grupě G modulo H. Potom množina levých tříd G/H s operací násobení tříd tvoří grupu, která se nazývá *faktorová grupa*.

- jednotkový prvek v G/H je $eH = H$
- inverzní ke gH je $g^{-1}H \in G/H$ } $\Rightarrow$ je to grupa
- asociativnost a uzavřenost jasné
- $\#(G/H) = \dfrac{\#G}{\#H}$ … index H v G (Lagrange)
- $A, B \in G/H \Rightarrow AB = \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$

! rozumí se bez opakování prvků !

ZOBRAZENÍ MEZI GRUPAMI

Def: Homomorfismus z grupy G do grupy G' je zobrazení $\varphi: G \to G'$ zachovávající grup. operaci:
$\forall g_1, g_2 \in G : \varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$

Def: Jádro homomorfismu je množina $Ker_\varphi \equiv \{g \in G \mid \varphi(g) = e'\}$

Def: Obraz — " — — " — $Im_\varphi \equiv \{g' \in G' \mid \exists e \in G\ \varphi(g) = g'\}$

Def: • φ je surjektivní, pokud je "na" : $Im_\varphi(G) = G'$
(také epimorfismus)

• φ je injektivní, pokud je prosté: $g_1 \neq g_2 \Rightarrow \varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$
$\Leftrightarrow \exists \varphi^{-1}$ na Im_φ (monomorfismus)

• φ je izomorfismus (bijekce), pokud je surjektivní i injektivní

• $\varphi: G \to G \Rightarrow$ homomorfismus $\equiv$ endomorfismus
izomorf. $\equiv$ automorfismus

Př: $\varphi_a(g) = aga^{-1} \equiv$ vnitřní automorfismus

Lemma: a, $\varphi(e_G) = e_{G'}$
Dk: Dcv. b, $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} \quad \forall g \in G$ (nezaměnit s $\varphi^{-1}(g)$)

Věta 6: a, Ker_φ je normální podgrupa G
b, Im_φ je podgrupa G'
c, $Im\,\varphi \sim G/Ker\,\varphi$

Dk: a) → $Ker\,\varphi$ je podgrupa ⇐ ověřit axiomy (Dcv.)
• $e \in Ker\,\varphi$ (Lemma)
• $g \in Ker\,\varphi \Rightarrow \varphi(g) = e$ & $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = e^{-1} = e$
$\Rightarrow g^{-1} \in Ker\,\varphi$
• $g_1, g_2 \in Ker\,\varphi = \varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) = e \cdot e = e$
• $g \in Ker\,\varphi,\ a \in G \Rightarrow \varphi(aga^{-1}) = \varphi(a)\varphi(g)\varphi(a^{-1}) = e$ $\boxtimes$ a)

b, • ověření axiomů (Dcv.)

c) • $\mathrm{Ker}\,\varphi$ je norm. podg. $\Rightarrow G/\mathrm{Ker}\,\varphi$ je faktorgrupa

& $\exists$ rozklad $G = e\,\mathrm{Ker}\,\varphi + g_2 \mathrm{Ker}_\varphi + \dots + g_n \mathrm{Ker}\,\varphi$

• izomorfismem mezi $\mathrm{Im}\,\varphi$ a $G/\mathrm{Ker}\,\varphi$ je právě φ:

$\rightarrow \varphi(g_i \mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(g_i)e' = \varphi(g_i)$

$\Rightarrow$ celou třídu zobrazí do jediného prvku

$\rightarrow$ zobrazení je surjektivní z def. $\mathrm{Im}\,\varphi$

$\rightarrow$ zobrazení je prosté:

nechť $\exists g_1, g_2 : \varphi(g_1 \mathrm{Ker}\,\varphi) = \varphi(g_2 \mathrm{Ker}\,\varphi) = g'$

$\Rightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2) = g' \quad /$ nás. $\varphi(g_1^{-1}) = g'^{-1}$

$\Rightarrow \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_1) = \varphi(e) = \varphi(g_1^{-1}g_2) = e'$

$\Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow g_2 \in g_1 \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow g_1 \mathrm{Ker}\,\varphi = g_2 \mathrm{Ker}\,\varphi$

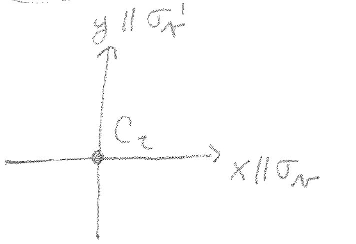
$\boxtimes$

Def: Nechť H je norm. podgrupa G. Potom zobrazení $\pi : G \to G/H \quad g \mapsto gH \quad \forall g \in G$ je přirozená projekce G na faktorgrupu G/H.

Věta 7: π je surjektivní a $\mathrm{Ker}\,\pi = H$.

Dk: analogicky V6.

Př: • homomorfismy grupy $C_{2v} = \{E, C_2, \sigma_v, \sigma_v'\}$



a) $\varphi : C_{2v} \to M^{3\times3}$ (~ fce na $\mathbb{R}^3$)

$g \mapsto D(g) \quad D(g)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

$D(E) = \begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&1\end{pmatrix} \quad D(C_2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow D(C_2) = \begin{pmatrix}-1&&0\\&-1&\\0&&1\end{pmatrix}$

$D(\sigma_v) = \begin{pmatrix}1&&0\\&-1&\\0&&1\end{pmatrix} \quad D(\sigma_v') = \begin{pmatrix}-1&&0\\&1&\\0&&1\end{pmatrix}$

• injektivní zobrazení $C_{2v} \to O(3)$

• věrná maticová reprezentace

b) $\varphi_x : C_{2v} \to M^{1\times1}$ (transf. na ose x)

$\varphi_x : x' = D_x(g)x$

$\Rightarrow D_x(E) = 1,\ D_x(C_2) = -1,\ D_x(\sigma_v) = 1,\ D_x(\sigma_v') = -1$

• surjekce $C_{2v} \to O(1) \sim (\{1,-1\}, \cdot)$

c) $\varphi_y : C_{2v} \to M^{1\times1}: \quad g \mapsto D_y(g) \quad y' = D_y(g)$

$D_y(E) = 1,\ D_y(C_2) = -1,\ D_y(\sigma_v) = -1,\ D_y(\sigma_v') = 1$

• jiná (neekviv.) surjekce $C_{2v} \to O(1)$

d) $\varphi_z : \quad z' = D_z(g) \qquad D_z(g) = 1 \quad \forall g$

• surjekce $C_{2v} \to (\{1\}, \cdot) \equiv$ triviální reprezentace

$\to \mathrm{Ker}\,\varphi = \{E\},\ \mathrm{Ker}\,\varphi_x = \{E, \sigma_v\},\ \mathrm{Ker}\,\varphi_y = \{E, \sigma_v'\},\ \mathrm{Ker}\,\varphi_z = C_{2v}$

$\to \{E, C_2\} \subset C_{2v}$ je také normální $\Rightarrow \exists \pi : C_{2v} \to C_{2v}/\{E, C_2\}$

$D_\pi(E) = 1,\ D_\pi(C_2) = 1,\ D_\pi(\sigma_v) = -1,\ D_\pi(\sigma_v') = -1$

$\Rightarrow$ mám 4 neekviv. homomorfismy $C_{2v} \to M^{1\times1}$
($\Leftrightarrow$ 4 neekvivalentní 1-dim. reprezentace)

Dcv: $\forall \varphi$ výše přenášejí grup. operaci $\Rightarrow$ jedná se opravdu o homomorfismy

PŘÍMÝ A POLOPŘÍMÝ SOUČIN GRUP

$(G \sim G_1 \otimes G_2)$

Def: Grupa G je <u>direktním součinem</u> grup G_1 a G_2, pokud je izomorfní grupě uspořádaných dvojic $\{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ s binární operací

$$(g_1, g_2)\cdot(g_1', g_2') = (g_1 \cdot g_1', g_2 \cdot g_2') \quad \forall g_1, g_1' \in G_1; g_2, g_2' \in G_2$$

kde binární operace na pravé straně jsou def. na grupách G_1 a G_2.

- jedná se opravdu o grupu: $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$
  $e_{G_1 \otimes G_2} = (e_1, e_2)$
- pro kon. grupy platí $\#(G_1 \otimes G_2) = (\#G_1)\cdot(\#G_2)$
- množina $\{(g_1, e_2), \cdot\}$ tvoří <u>normální</u> podgrupu $G_1 \otimes G_2$ izomorfní G_1 a stejně pro $\{(e_1, g_2), \cdot\}$
  $\Rightarrow$ prvky (g_1, e_2) a (e_1, g_2) komutují, obě podgrupy mají jediný spol. prvek (e_1, e_2) a každý prvek $G_1 \otimes G_2$ lze vyjádřit jako součin prvků z těchto podgrup $\Rightarrow$

<u>Věta 8:</u>

Jestliže grupa G má dvě podgrupy G_1 a G_2 takové, že

a, $\forall$ prvky z G_1 komutují se $\forall$ prvky z G_2

b, $G_1 \cap G_2 = \{e\}$

c, $\forall g \in G \; \exists g_1 \in G_1 \;\&\; \exists g_2 \in G_2 : g = g_1 g_2$,

potom $G \sim G_1 \otimes G_2$.

Dk: (Cornwell str. 39)

1, $g = g_1 \cdot g_2$ je jednoznačný rozklad (sporem)

2, $\vartheta : G \to G_1 \times G_2 \quad \vartheta(g) = (g_1, g_2)$ je izomorfismus

Pozn: V5.a, lze ekvivalentní nahradit požadavkem, že G_1 a G_2 jsou normální podgrupy

Př: • $O(3) \sim SO(3) \otimes C_i \qquad C_i = \{E, i\}$

• $C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\} = \{e, a^2, a^4\} \otimes \{e, a^3\}$

• $Sym(n = n_1 + n_2) \supset Sym(n_1) \otimes Sym(n_2)$

– $Sym(n_i)$ jsou zřejmě invar. podgrupy ($Sym(n_1)$ nesahá na body $n_1+1 \dots n$ a naopak), $Sym(n_1) \otimes Sym(n_2)$ ale neobsahuje permutace mezi prvky $1, \dots, n_1$ a $n_1+1, \dots, n$

Def: G je polopřímý součin G_1 a G_2 ($G \sim G_1 \circledS G_2$, $G \sim G_1 \rtimes G_2$) pokud

a, G_1 je normální podgrupa G

b, $G_1 \cap G_2 = \{e\}$

c, $\forall g \in G \ \exists g_i \in G_i : g = g_1 g_2$

NB: b, implikuje jednoznačnost rozkladu c)

Př: • Eukl. grupa v $\mathbb{R}^3$ $E(3) \sim (\text{translace}) \circledS (\text{rotace})$:

$\to g \in E(3) \Rightarrow g \equiv \{R(g) | \vec{t}(g)\}$

$\vec{r}\,' = R(g)\vec{r} + \vec{t}(g) \qquad \vec{r} = R^{-1}(g)\vec{r}\,' - R^{-1}(g)\vec{t}(g)$

$\{R(g_1 g_2) | \vec{t}(g_1 g_2)\} = \{R(g_1)R(g_2) | R(g_1)\vec{t}(g_2) + \vec{t}(g_1)\}$

$\to \{\mathbb{1}, \vec{t}(g)\}$ je normální podgrupa $E(3)$:

$\{R(h) | \vec{t}(h)\} \cdot \{\mathbb{1}, \vec{t}(g)\} \cdot \{R(h) | \vec{t}(h)\}^{-1} = \{\mathbb{1} | R(h)\vec{t}(g)\}$ (Dcv.)

$\to \{R(g) | \vec{t}(g)\} = \{\mathbb{1} | \vec{t}(g)\} \cdot \{R(g) | \vec{0}\}$

$\to$ b, je zřejmé

• Poincarého grupa : $x' = \Lambda(g)x + t(g)$ podobně

• $Sym(3) = A_3 \circledS Sym(2)$

$\to A_3 = \{e, \binom{123}{312}, \binom{123}{231}\}$ … alternující grupa – sudé permutace

je normální podgrupa $Sym(3)$

$\to Sym(2) = \{e, \binom{12}{21}\}$ není normální

NB: A_n je jádro homomorfismu $sgn: Sym(n) \to \{1, -1\} \Rightarrow$ je to nutně invariantní podgrupa

PŮSOBENÍ GRUPY NA MNOŽINĚ

Def: Nechť G je grupa a M množina. Řekneme, že <u>G působí na M</u>, pokud $\exists \varphi : G \times M \to M$

$\forall g, h \in G$ a $\forall m \in M$: $\varphi(g, m) \equiv T(g)m \equiv gm$

takové, že:

a, $T(g)T(h)m = T(gh)m$

b, $T(e)m = m$

- $T(g)$ je tedy konkrétní transformace na M, odpovídající $g \in G$

$\Rightarrow$ působení je homomorfismus z G do grupy $\forall$ transformací na M

- tento homomorfismus nemusí být prostý, viz př. působení C_{3v} na $\mathbb{R}^3$ nebo $\mathbb{R}^1$

Def: <u>Orbitou prvku</u> $m \in M$ při působení G nazýváme

$$G.m = \{T(g)m \mid g \in G\} \subset M$$

Def: <u>Stabilizátor</u> (izotropní grupa) G_m příslušný prvku $m \in M$ je $G_m = \{g \in G \mid T(g)m = m\} \subset G$

Lemma: G_m je podgrupa.

Dk: • $e \in G_m \Leftarrow T(e) = \mathbb{1}$ z def. působení

• $g \in G_m \Rightarrow g^{-1} \in G_m$: $m = T(e)m = T(g^{-1}g)m = T(g^{-1})T(g)m$
$= T(g^{-1})m$

• $g, g' \in G_m \Rightarrow T(g)T(g')m = m = T(gg')m$ $\boxtimes$

Věta 9: $(\# G.m)(\# G_m) = \# G$ pro konečnou G a $\forall m \in M$.

Dk: • $n \in G.m \Rightarrow \exists g \in G$: $T(g)m = n$

• nechť $m \in M$ a $g \in G$ jsou pevné a nechť $\exists g' \in G$:

$$n = T(g)m = T(g')m \Rightarrow m = T(g^{-1}g')m \Rightarrow g^{-1}g' \in G_m$$

$\Rightarrow$ pro pevné g, m $\exists$ právě $\# G_m$ prvků $g' \in G : g^{-1}g' \in G_m$ (věta o přerozp.)

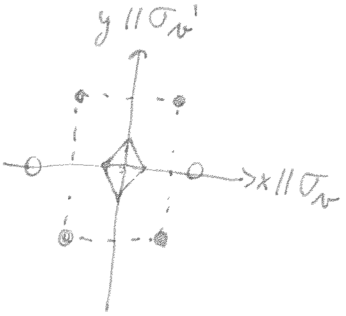
$\Rightarrow$ navíc každý $g \in G$ zobrazí m na nějaký prvek z $G.m$

$\Rightarrow$ mohu vybrat $\#(G.m)$ "neekviv." prvků g

$\Rightarrow \# G = (\# G.m)(\# G_m)$ $\boxtimes$

Jinak: Na každý prvek z $G.m$ zobrazuje právě $\#G_m$ prvků grupy a každý prvek grupy musí zobrazit někam na orbitu.

Př: C_{2v} na $\mathbb{R}^3$



• $\Rightarrow \#(G.m) = 4, \; G_m = \{E\}$

○ $\Rightarrow \#(G.m) = 2, \; G_m = \{E, \sigma_v\}$

◇ $\Rightarrow \#(G.m) = 1, \; G_m = C_{2v}$

PŮSOBENÍ GRUPY NA SOBĚ $(M=G)$

1, levé/pravé posunutí

$L_g : G \to G : h \mapsto gh$ $\quad \forall h \in G$ a $g \in G$ pevné

$R_g : G \to G : h \mapsto hg$

- L_g, R_g jsou izomorfismy (≡ přeuspořádání)
- L_g, R_g jsou tranzitivní – G tvoří jedinou orbitu, $G_h = \{e\}$ $\forall h \in G$

2, sdružení (konjugace, vnitřní automorfismus)

$T(g)h = ghg^{-1}$ $\quad \forall h \in G$

- orbitami jsou (h)
- $G_h = \{g \in G \,|\, gh = hg\}$ je podgrupa – srov. dk V4:

$$\#G = \#(h) \cdot \#G_h$$

REPREZENTACE GRUP

- abstraktní grupa ⇒ maticová (příp. operátorová) repre, se kterou umím zacházet
- přináší užitečné informace a nástroje i bez explicitní konstrukce matic

NB: Vektorový prostor V nad polem (field) K:

Množina (vektorů), na které je def. sčítání vektorů a (skalární) násobení vektoru prvkem z K, splňující

1, asociativita sčítání
2, komutativita sčítání
3, existence neutrálního prvku vůči sčítání (0)
4, ∃ inverzního prvku vůči sčítání $\forall v \in V$ $(-v)$
5, asociativita skal. nás.: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6, invariance při násobení jednotkovým prvkem z K
7, distributivnost vůči + v K: $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
8, distributivnost vůči + ve V: $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$

Pole: Množina prvků $(T, +, \cdot)$ se dvěma binárními
(field) operacemi, splňujícími

1, $\alpha, \beta \in T \Rightarrow \alpha+\beta \in T$
2, $\alpha, \beta \in T \Rightarrow \alpha.\beta \in T$
3, $\exists 0 : \alpha + 0 = \alpha \quad \forall \alpha \in T$
4, $\exists 1 : 1.\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in T$
5, $\forall \alpha \in T \;\; \exists -\alpha \in T: \alpha + (-\alpha) = 0$ (neutr. prvek vůči +)
6, $\forall \alpha \in T \;\; \exists \alpha^{-1} \in T: \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$
7, '·' i '+' jsou komutativní

Těleso: (division ring): komutativita jen vůči +

Def: Lineární zobrazení je zobrazení $A: V \to V'$ (mezi vekt. prostory) splň.

1, $A(\alpha v + \beta w) = \alpha A(v) + \beta A(w) \quad \forall v, w \in V$ a $\forall \alpha, \beta \in K$

- Je-li $V' = V$, mluvíme o lin. operátoru.

- End(V) ... množina ∀ lin. op. na V (vč. $\mathrm{Ker} \neq 0$; endomorfismy)
- Aut(V) ... invertovatelné $(\mathrm{Ker} = 0)$ lin. operátory na V (automorfismy, $\sim GL(V)$, lin. transformace na V)

Def: <u>Reprezentace (ρ, V) grupy</u> G na n-dim vekt. prostoru V nad polem K je homomorfismus $\rho: G \to Aut(V)$.

Nb: $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$, $\rho(e) = E_{Aut(V)}$, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$

- <u>notace</u>: ρ je zobrazení, $\rho(g) = T(g) \in Aut(V)$ je lin. operátor na V. $D(g)$ značí specifickou maticovou reprezentaci

Def: Nechť $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ je báze n-dim vekt. prostoru V. Potom je každý automorfismus dán nějakou maticí $D \in \mathcal{M}^{n \times n}$ a tedy každému $g \in G$ můžeme přiřadit matici $D(g) \in GL(n, K)$ a mluvíme o <u>maticové reprezentaci D grupy G.</u> $(D: G \to GL(n, K))$

- V již není nutno specifikovat
- matice operátoru $T(g)$:

$x = e_i x^i$ $\quad$ $\{e_i\}$ báze V

$\Rightarrow \boxed{T(g) e_i = e_k D_{(g)}{}^k{}_i}$ $\quad$! pořadí násobení

$\Rightarrow x' = T(g) x = T(g) e_i x^i = e_k D_{(g)}{}^k{}_i x^i = e_k x'^k$

$\Rightarrow \boxed{x'^k = D_{(g)}{}^k{}_i x^i}$ $\quad$! zde již obvyklé mat. nás.

- snadno ověříme $D(e) = \mathbb{1}$ a $D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \Rightarrow$ je to repre

Def: <u>Dimenze reprezentace</u> je dimenze prostoru V

Def: <u>Triviální reprezentace</u>: $\rho(g) = E_{Aut(V)}$ $\quad \forall g \in G$

- pro dim $V = 1$ jde o <u>úplně symetrickou ireducibilní reprezentaci</u> (vždy $\exists$)

Def: <u>Věrná reprezentace</u>: ρ je injektivní (prosté).

NB: • ve fyzice se často používá T jak pro ρ, tak pro $T(g)$ (obvykle z kontextu jasné)

Pozn: • ∃ nekonečně mnoho reprezentací jedné G na různě-rozměrných V

• na stejném V mohou existovat různé repre, mnohé však ekvivalentní

• některé vícerozměrné repre lze rozložit na několik méně-rozměrných – reducibilita

⇒ budou nás zajímat především neekvivalentní ireducibilní reprezentace ("znám ∀ ⇒ vím vše, co potřebuji")

Def: Nechť V_1 a V_2 jsou vektorové prostory. Reprezentace (ρ_1, V_1) a (ρ_2, V_2) grupy G jsou ekvivalentní, pokud ∃ izomorfismus $\phi: V_1 \to V_2$ takový, že

$$T_2(g)v = \phi \cdot T_1(g) \cdot \phi^{-1} v \qquad \forall v \in V_2 \text{ a } \forall g \in G$$

Def: Splétající (intertwining) zobrazení $S: V_1 \to V_2$, které pro 2 reprezentace (ρ_1, V_1) a (ρ_2, V_2) splňuje

$$S \circ T_1(g) v = T_2(g) \circ S v \qquad \forall g \in G \text{ a } \forall v \in V_1$$

Pozn: • $\dim V_1 = \dim V_2$ není postačující podmínka $\rho_1 \sim \rho_2$

• $\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \exists S$ splétající izomorfismus $(\exists S^{-1})$

Př: • C_{2v} na $\mathbb{R}_3$ a $\mathbb{R}$ výše

• $C_i = \{E, i\}$ na $\mathbb{R}$: 1, $\rho_g(E) = 1$, $\rho_g(i) = 1$

2, $\rho_u(E) = 1$, $\rho_u(i) = -1$

→ cf. parita – chování vlnové fce při inverzi

Př: (ekvivalentní) mat. reprezentace při změně báze

• $T(g) e_i = e_k D(g)^k{}_i \Rightarrow x' = T(g) x \Leftrightarrow x'^k = D(g)^k{}_i x^i$

• změna báze: $\tilde{e}_i = e_j A^j{}_i \Rightarrow e_j = \tilde{e}_i (A^{-1})^i{}_j$

$A: V \to V$ … matice přechodu

• $x = \tilde{e}_i \tilde{x}^i = e_j x^j = \tilde{e}_i (A^{-1})^i{}_j x^j \Rightarrow \tilde{x}^i = (A^{-1})^i{}_j x^j$

⇒ složky vektoru se transformují pomocí $A^{-1} \equiv B$

$$\Rightarrow \tilde{x}^i = B^i{}_j x^j \Leftrightarrow \tilde{x} = Bx$$