• bázi $\tilde{e}_j$ odpovídá obecně jiná mat. reprezentace $\tilde{D}$: (21)

$$\tilde{x} = Bx \, , \quad x' = D(g)x \, , \quad \tilde{x}' = \tilde{D}(g)\tilde{x}$$

$$\tilde{x}' = \tilde{D}(g)\tilde{x} = \tilde{D}(g)Bx = Bx' = BD(g)x = BD(g)B^{-1}\tilde{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{D}(g) = BD(g)B^{-1}}$$

$\Rightarrow D(g)$ a $\tilde{D}(g)$ jsou svázány podobnostní transformací, B definuje izomorfismus $V \to V$

$\Rightarrow$ jedná se o ekvivalentní mat. reprezentace

REDUCIBILNÍ A IREDUCIBILNÍ REPREZENTACE

Def: Podprostor $W \subset V$, který se nemění při působení $\varphi: G \times V \to V$ (neboli $G \cdot W \subset W$: $T(g)\vec{w} \in W \;\; \forall g \in G \; \forall \vec{w} \in W$) se nazývá invariantní podprostor. Pokud W neobsahuje žádný další netriviální invar. podprostor, jedná se o ireducibilní invariantní podprostor.

Def: Pokud V obsahuje při působení G pomocí repre (ρ, V) netriviální invar. podprostor, je V reducibilní prostor a (ρ, V) je reducibilní reprezentace. V opačném případě jde o ireducibilní repre.

Def: Podreprezentace reprezentace (ρ, V) je reprezentace $(\rho_{\downarrow W}, W)$, kde W je invar. podprostor V při působení G.

Reducibilita maticových reprezentací

• $W \subset V$ invariantní $\Rightarrow$ volím bázi

$$W = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_r)$$

$$W_\perp = V \setminus W = \{e_{r+1}, \dots, e_d\}$$

$$\Rightarrow D(g) = \begin{pmatrix} D^W(g) & D^{WW_\perp}(g) \\ 0 & D^{W_\perp}(g) \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \forall e_i, \, i = 1, \dots, r: \; T(g)e_i = \sum_{k=1}^{r} e_k D^W(g)^k{}_i$$

- $D^W(g)$ tvoří podreprezentaci $D(g)$:

$$D(g_1)D(g_2) = \left(\begin{array}{c|c} D^W(g_1)D^W(g_2) & D^W(g_1)D^{WW_\perp}(g_2) + D^{WW_\perp}(g_1)D^{W_\perp}(g_2) \\ \hline 0 & D^{W_\perp}(g_1)D^{W_\perp}(g_2) \end{array}\right)$$

- $D^{W_\perp}(g)$ je také reprezentace, ale nejedná se o podrepre $D(g)$ ($W_\perp \subset V$ není invariantní)
- v obecné bázi V, nerespektující invariantní podprostory, nemají matice D tvar (*), ale $\exists$ podobnostní trce, která $D(g)$ $\forall g$ na tento tvar převede $\Rightarrow$

<u>Def</u>: <u>Maticová reprezentace</u> je <u>reducibilní</u>, pokud je ekvivalentní reprezentaci $D(g)$, jejíž matice mají pro $\forall g \in G$ blokovou strukturu (*).

<u>Příklad</u>: a) 2-dim repre $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

- $(\mathbb{R}^+, \cdot) \sim (\mathbb{R}, +)$: $x = e^y \Rightarrow xx' = e^{y+y'}$ $\Leftrightarrow y = \log(x)$

$$\Rightarrow D(x) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : D(x)D(x') = \begin{pmatrix} 1 & y+y' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(xx')$$

$\downarrow$ podrepre na $\mathcal{L}\{\binom{1}{0}\}$

$D(x) = 1 \quad \forall x$ ... triviální ired. reprezentace

b) 3-dim reprezentace $SO(2)$

- působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$: $T(g)v = R^z_\varphi v$

$\mathcal{L}(e_z) = \mathcal{L}(e_z) = W_1$ $\searrow$ invariantní podprostory

$\mathcal{L}(\{e_x, e_y\}) = \mathcal{L}(\{e_x, e_y\}) = W_2$ $\nearrow$

$$\Rightarrow R^z_\varphi = \left(\begin{array}{cc|c} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R^z_{\varphi} \downarrow W_2 = \begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$ věrná 2D repre

$R^z_{\varphi} \downarrow W_1 = 1$ triv. repre

- $g \mapsto R^x_\varphi \Rightarrow$ jiné invar. podprostory : $\langle x \rangle, \langle yz \rangle$

Úplná reducibilita

Def: Reprezentace (ρ, V) grupy G je úplně reducibilní, pokud $\exists$ rozklad $V = \sum_{j\in J} \oplus V_j$, kde V_j jsou ireducibilní invariantní podprostory V při působení G.

- J je množina indexů, která je pro konečně-dim. prostory konečná
- volbou vhodné báze, respektující rozklad na V_j, dostaneme mat. reprezentaci ve tvaru

$$D(g) = \bigoplus_j D^j(g) \equiv \mathrm{diag}\,(D^1(g), \dots, D^p(g)) = \begin{pmatrix} D^1(g) & & 0 \\ & D^2(g) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & D^p(g) \end{pmatrix}$$

- $D^j(g)$ jsou již iredukc. reprezentace

$\Rightarrow$

Def: Maticová reprezentace $D(g)$ je úplně reducibilní, pokud $\exists A \in GL(n) : D(g) = A D'(g) A^{-1}$, kde $D'(g)$ je blokově diagonální $\forall g \in G$.

Př:
- $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$ je úplně reducibilní při zobecnění na komplexní prostor: (cf. věta: G abelovská $\Rightarrow$ komplexní ired. repre jsou 1D)

$\xi_1 = e_x + i e_y$ a $\xi_2 = e_x - i e_y$ generují 1D invariantní podprostory:

$$\begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \dots \Rightarrow A^+\begin{pmatrix} c\varphi & -s\varphi \\ s\varphi & c\varphi \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \text{ pro } A = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e^{-i\varphi}$ a $e^{i\varphi}$ jsou dvě věrné 1D repre

- $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jako repre $(\mathbb{R}^+, \cdot) \sim (\mathbb{R}, +)$ není úplně reduc.:

Nechť $\exists A$: $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix} A^{-1} \Rightarrow$ (det a tr se nemění)

$$\Rightarrow \begin{matrix} f(y)g(y) = 1 \\ f(y) + g(y) = 1 \end{matrix} \Rightarrow f(y) = g(y) \equiv 1 \quad \lightning$$

$\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ je invar.

$\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ není invar.

<u>Věta 10:</u> Každá ireducibilní reprezentace konečné grupy je konečně-dimenzionální.

<u>Dk:</u> (ρ, V) je ired. repre, $x \in V$ libovolný vektor

$\Rightarrow \{T(g)x \,/\, g \in G\}$ je konečně-rozměrná množina vektorů z V

$\Rightarrow \mathcal{L}\{T(g)x \,/\, g \in G\}$ je konečně-dim. invariantní podprostor V

• (ρ, V) je ired. $\Rightarrow \mathcal{L}\{\,\} = V \Rightarrow \dim V < +\infty$. $\boxtimes$

UNITÁRNÍ REPREZENTACE

NB: Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ – vekt. prostor se skalárním součinem $\langle\cdot|\cdot\rangle$, který je úplný ($\Leftrightarrow$ konvergence Cauchyovských posloupností v topologii indukované $\langle\cdot|\cdot\rangle$) a separabilní ($\Leftrightarrow$ každý $v \in \mathcal{H}$ je limitou nějaké posloupnosti ze spočetné podmnožiny $M \subset \mathcal{H}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ spočetná báze)

Def: Unitární repre grupy G je reprezentace na Hilb. prostoru $\mathcal{H}$ taková, že každý $g \in G$ je reprezentován unitárním operátorem $\mathcal{U}(g)$:

$$\mathcal{U}(g)^+ \mathcal{U}(g) = \mathcal{U}(g)\mathcal{U}(g)^+ = \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow \langle \mathcal{U}(g)\psi | \mathcal{U}(g)\varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H} \text{ a } \forall g \in G.$$

NB: • unitární operátory: • pro omezené operátory (obzvláště $\dim \mathcal{H} = \infty$: $\exists K \in \mathbb{R}: \|\mathcal{U}\psi\| \le K \|\psi\|$ $\forall \psi \in \mathcal{H}$) definuji sdružení:
$\langle \psi | A^+ \varphi \rangle \equiv \langle A\psi | \varphi \rangle$ $\Rightarrow$ pro invertovatelné definuji unitaritu:
$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle U\psi | U\varphi \rangle = \langle \psi | U^+ U \varphi \rangle \Rightarrow U^+ U = \mathbb{1}$ & $\exists U^{-1} \Rightarrow U^{-1} = U^+ \Rightarrow UU^+ = \mathbb{1}$

Def: Maticová unitární repre D: $D(g)^{-1} = D(g)^+ \quad \forall g$

Věta 11: Každá konečně-rozměrná unitární reducibilní repre $(\rho, \mathcal{H})$ grupy G je úplně reducibilní.

Dk: Nechť $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ je netriv. invar. podprostor ($\Leftarrow \rho$ reduc.)

$\Rightarrow \mathcal{H}_1^\perp = \mathcal{H} | \mathcal{H}_1$ je také invariantní:

$$\psi \in \mathcal{H}_1^\perp \Rightarrow \langle \varphi | \psi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_1$$

$$\mathcal{U}(g)\psi \in \mathcal{H}_1^\perp : \langle \varphi | \mathcal{U}(g)\psi \rangle = \langle \mathcal{U}(g)\mathcal{U}(g)^{-1}\varphi | \mathcal{U}(g)\psi \rangle$$
$$= \langle \mathcal{U}(g^{-1})\varphi | \mathcal{U}(g)^+\mathcal{U}(g)\psi \rangle = \langle \varphi' | \psi \rangle = 0$$

• pokud $\mathcal{H}_1$ nebo $\mathcal{H}_1^\perp$ jsou dále reducibilní, mohu takto rozkládat až do úplné reducibility (zde potřebuji $\dim \mathcal{H} < +\infty$) $\boxtimes$

Př: 2D-repre $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ není unit $\Rightarrow$ věta o ní nic neříká

Věta 12: Každá konečně-dim. reprezentace konečné nebo kompaktní Lieovy grupy je ekvivalentní nějaké unitární reprezentaci.

Dk: (náznak)

- NB: každý konečně-dim. vekt. prostor je izomorfní s $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ mohu zavést bázi $\{e_i\}$

  $\Rightarrow x = x^i e_i \Rightarrow \langle x | y \rangle \equiv \sum_i (x^i)^* y^i$ je skal. součin
- pokud (ρ, V) není unitární vůči $\langle \cdot | \cdot \rangle$, zkonstruuji nový skal. součin

  $$\langle x | y \rangle' \equiv \frac{1}{\# G} \sum_{g'} \langle T(g') x | T(g') y \rangle$$

- teorém o přeusp. $\Rightarrow$ $\langle T(g) x | T(g) y \rangle' = \langle x | y \rangle'$

  $\Rightarrow$ (ρ, V) je unitární vůči $\langle \cdot | \cdot \rangle'$

$\boxtimes$

Pozn:
- $\langle \, | \, \rangle'$ je ekvivalentní $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – indukuje stejnou topologii (otevřené množiny) $\Leftrightarrow$ konvergence stejných posloupností

  $\Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}; \; 0 < a \leq b \mid a \langle x | x \rangle \leq \langle x | x \rangle' \leq b \langle x | x \rangle \quad \forall x \in V$
- <u>kompaktní Lieovy grupy</u> = kompaktní hladké variety (= parametrizované souřadnicemi z kompaktní oblasti $\mathbb{R}^n$, pokud $\exists$ globální parametrizace; kompaktní podmn. $\mathbb{R}^n$ = omezená a uzavřená)
  - např. $SO(2)$, $O(n)$, ale ne $(\mathbb{R}^+, \cdot)$
  - pro komp. Lieovy grupy $\exists$ pravo/levo-invariantní míry, které se rovnají:

    $\Rightarrow \exists \int_G dg < +\infty \; : \; \int_G f(hg) dg = \int_G f(g) dg$

    $\Rightarrow \frac{1}{\# G} \sum_g \rightarrow \frac{1}{|G|} \int_G dg$ a dále jsou důkazy vět analog.

Věta 15: (Maschkeův teorém)

Každá konečně-rozměrná reducibilní repre. konečné (kompaktní Lieovy) grupy je úplně reducibilní.

Dk: • víme z předchozí věty, že taková repre ~ unit. reprezentaci a taková je nutně úplně reducibilní (věty 11 & 12) ☒

SCHUROVA LEMMATA

Lemma 1: Nechť (ρ_1, V_1) a (ρ_2, V_2) jsou ireducibilní repre. grupy G a nechť S je splétající zobrazení mezi nimi:

$$S: V_1 \to V_2 \qquad S T_1(g) v_1 = T_2(g) S v_1 \quad \forall g \in G \text{ a } \forall v_1 \in V_1.$$

Potom je buď $S = 0$ nebo je S izomorfismus a $\rho_1 \sim \rho_2$.

• $S = 0$: $\operatorname{Ker} S = V_1 \Leftrightarrow S v = 0 \quad \forall v \in V_1$

Dk: • $\operatorname{Ker} S$ a $\operatorname{Im} S$ jsou invariantní podprostory při působení V:

a) $v_1 \in \operatorname{Ker} S \Rightarrow S T_1(g) v_1 = T_2(g) S v_1 = 0 \Rightarrow T_1(g) v_1 \in \operatorname{Ker} S$

b) $v_2 \in \operatorname{Im} S \Rightarrow \exists v_1 : v_2 = S v_1 \Rightarrow T_2(g) v_2 = T_2(g) S v_1$
$= S T_1(g) v_1 = S v_1' \Rightarrow T_2(g) v_2 \in \operatorname{Im} S \quad \forall g$

• V_1 a V_2 jsou ireducibilní $\Rightarrow$

a) $\operatorname{Ker} S = \emptyset$ & $\operatorname{Im} S = V_2 \Rightarrow S$ je izomorfismus

b) $\operatorname{Ker} S = V_1$ & $\operatorname{Im} S = \emptyset \Rightarrow S = 0$ ☒

Lemma 2 (důsledek SL1 pro konečně-rozměrné repre)

Nechť (ρ, V) je <u>komplexní</u> konečně-rozměrná ired. repre. grupy G a S je (splétající) operátor na V $(S: V \to V)$, který komutuje s $T(g)$ $\forall g \in G$. Potom $S = \lambda \mathbb{1}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dk: • pro nenulový S $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $Sv = \lambda v$ pro $v \in V$ (každý op. má vl. čísla; v kon. dimenzi vždy $\exists$ řešení char. polynomu v $\mathbb{C}$)

• vlastní podprostor příslušný λ $V_\lambda \subset V$ je invariantní při působení G:

$$v \in V_\lambda \Rightarrow S\,T(g)\,v = T(g)\,S v = \lambda\,T(g)\,v \Rightarrow T(g)\,v \in V_\lambda$$

$$\Rightarrow /(\rho, V) \text{ ired.}/ \Rightarrow V_\lambda = V \Rightarrow S = \lambda \mathbb{1} \quad (S e_i = \lambda e_i \;\forall i / e_i \text{ báze})$$

$\boxtimes$

Pozn: • v nekonečné dimenzi nemusí být podprostor V_λ uzavřený: $\{v_k\} \subset V_\lambda$ posloupnost neimplikuje $\lim\limits_{k \to \infty} v_k = v \in V_\lambda$ $\Rightarrow$ $S\,T(g) = T(g)\,S$ neimplikuje invariantnost V_λ

DŮSLEDKY SCHUROVÝCH LEMMAT

Kritérium ireducibility konečně-dim repre konečných (komp. Lieových) grup

NEUŽITEČNÉ!

- každá reducibilní repre je úplně reducibilní

$\Rightarrow$ lze převést na $\left(\begin{array}{c|c} \blacksquare & \\ \hline & \blacksquare \end{array}\right) \Rightarrow$ komutuje s $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \mathbb{1} \end{array}\right)$ pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow$ repre je ireducibilní, pokud je násobek jednotk. matice jedinou maticí, komutující se $\forall D(g)$

Věta 14: Komplexní konečně-rozměrné ireducibilní reprezentace abelovské grupy G jsou jednorozměrné.

Dk: • (ρ, V) konečně-dim repre abelovské grupy $\Rightarrow$

$$T(g)T(h) = T(h)T(g) \quad \forall g, h \in G$$

$$\Rightarrow T(h) \text{ komutuje } \forall T(g) \overset{SL2}{\Rightarrow} T(h) = \lambda(h)\mathbb{1} \quad \forall h \in G$$

$\rightarrow \rho$ je buď reduc. nebo 1-dim. $\boxtimes$

Př: • působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$ – potřebovali jsme komplexní V, potom už úplná reducibilita

Věta 15: (Relace ortogonality pro maticové reprezentace)

Nechť D^μ a D^ν jsou dvě komplexní ireducibilní maticové reprezentace konečné (komp. Lieovy) grupy. Dimenze reprezentací jsou d_μ a d_ν. Potom

1, jsou-li repre neekvivalentní, platí

$$\sum_{g \in G} D^\mu(g^{-1})_{ij} D^\nu(g)_{kl} = 0$$

2, jsou-li ekvivalentní a matice S splňuje $D^\mu(g) = S^{-1} D^\nu(g) S$

$$\Rightarrow \sum_{g \in G} D^\mu(g^{-1})_{ij} D^\nu(g)_{kl} = \frac{\#G}{d_\mu} S_{kj} (S^{-1})_{il}$$

3, jsou-li repre unitární a buď neekviv. $(\mu \neq \nu)$ nebo identické

$$\Rightarrow \sum_{g \in G} D^\mu(g)^*_{ji} D^\nu(g)_{kl} = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{kj} \delta_{il}$$

Dk: • B je libovolná matice $d_\mu \times d_\nu$

$$\Rightarrow A = \sum_g D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g) \quad \text{splňuje} \quad D^\mu(h) A = A D^\nu(h) \ \forall h \in G:$$

teorém o přerusp.

$$\sum_g D^\mu(h) D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g) = / hg^{-1} = g'^{-1} \Rightarrow g' = gh^{-1} / = \sum_{g'} D^\mu(g'^{-1}) B D^\nu(g'h)$$

$$= \left(\sum_{g'} D^\mu(g'^{-1}) B D^\nu(g') \right) D^\nu(h)$$

1, D^μ a D^ν neekviv. $\overset{SLZ}{\Rightarrow} A \equiv 0$ a volím $B_{jk} = \delta_{jr}\delta_{ks}$ (r,s fixuji)

$$\Rightarrow 0 = \sum_{jkg} D^\mu(g^{-1})_{ij} \delta_{jr} \delta_{ks} D^\nu_{kl}(g) = \sum_g D^\mu(g^{-1})_{ir} D^\nu(g)_{sl} \quad \square_{1)}$$

2, $D^\nu = S D^\mu S^{-1} \Rightarrow D^\mu(h) A = A S D^\mu(h) S^{-1} \Rightarrow D^\mu(h) AS = AS D^\mu(h)$

$\overset{SLZ}{\Rightarrow} AS = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow A = \lambda S^{-1}$

• určíme λ:

$$\mathrm{Tr}\, \lambda \mathbb{1} = \lambda d_\mu = \sum_g \mathrm{Tr} \left[D^\mu(g^{-1}) B S D^\mu(g) S^{-1} S \right] = \sum_g \mathrm{Tr}[BS]$$

$$= / B_{ij} = \delta_{ir}\delta_{sj} / = \#G \sum_{ij} \delta_{ir}\delta_{js} S_{ji} = \#G\, S_{sr} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\#G}{d_\mu} S_{sr}}$$

$$\bullet\ A_{il} = \lambda (S^{-1})_{il} = \sum_{jk} \sum_g D^\mu(g^{-1})_{ij} \delta_{jr} \delta_{sk} D^\nu(g)_{kl} = \sum_g D^\mu(g^{-1})_{ir} D^\nu(g)_{sl}$$

$$\Rightarrow \sum_g D^\mu(g^{-1})_{ir} D^\nu(g)_{sl} = \frac{\#G}{d_\mu} S_{sr} (S^{-1})_{il} \quad \square_{2)}$$

3, • $\mu = \nu$ = $S = \mathbb{1} = S^{-1} \Rightarrow S_{sr} = \delta_{sr}$

• $D^\mu(g^{-1})_{ij} = D^\mu(g)^*_{ji}$

$$\Rightarrow \sum_g D^\mu(g)^*_{ri} D^\nu(g)_{sl} = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{sr} \delta_{il} \quad \boxtimes$$

• důsledek: $\sum_\mu d_\mu^2 \le \#G$ ... suma běží přes neekviv. ired. repre (ukážeme, že platí rovnost)

$\Leftarrow (D^\mu_{ij}(g_1), \dots, D^\mu_{ij}(g_{\#G}))$ jsou vektory z $\#G$-dim vekt. prostoru, indexované μ, i, j $(i,j = 1, \dots, d_\mu)$, které jsou kolmé $\Rightarrow$ je jich $\sum_\mu d_\mu^2$ a přitom maximálně $\#G$

CHARAKTER REPREZENTACE

- chceme najít nějaké vlastnosti/charakteristiky reprezentací, které budou stejné pro $\forall$ ekvivalentní reprezentace
- ideálně by také měly být různé pro neekviv. repre, ale to půjde jen pro konečné grupy
- spec. pro maticové repre hledáme tedy <u>invarianty vůči podobnostním transformacím</u>
  - to jsou např. všechna vl. čísla
  - obvykle ale stačí jediná charakteristika $-\underline{\mathrm{Tr}\, D(g)}$

<u>Def</u>: Nechť (ρ, V) je repre. grupy G na konečně-dim V a $D(g)$ je odpovídající mat. reprezentace v nějaké bázi. Potom <u>funkci</u> $\chi : G \to \mathbb{C}$

$$g \longmapsto \chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g)$$

nazveme <u>charakter reprezentace</u>. $\chi(g)$ je <u>charakter prvku</u> $g \in G$ v repre. (ρ, V).

<u>Pozn</u>:
- $\chi(g') = \chi(g) \quad \forall g' \in (g) \quad \Leftarrow \mathrm{Tr}[ABC] = \mathrm{Tr}[CAB]$

  $\Rightarrow$ charakter prvku g je charakterem celé třídy (g)
- χ je stejný pro $\forall$ ekviv. repre $\Rightarrow$ je to <u>charakteristika třídy ekvivalence reprezentací</u>
- stejný char. <u>neimplikuje</u> ekvivalenci repre:

  $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$: $D(g) = \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ není ekviv. $D'(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ukážeme, že pro konečné a kompaktní L. grupy

  $\chi = \chi'$ implikuje $D \sim D'$
- $\chi(e) = \dim V \qquad (\Leftarrow D(e) = \mathbb{1})$
- $\chi(g^{-1}) = \chi(g)^*$ pro konečně-dim. repre (⇐ ekvivalence s unitární repre)

- <u>Charakter reducibilní reprezentace:</u>

$$D(g) = \bigoplus_i D_i(g) \quad \Rightarrow \quad \chi(g) = \sum_i \chi_i(g)$$