RELACE ORTOGONALITY PRO CHARAKTERY

<u>Věta 16:</u> Nechť χ^μ a χ^ν jsou charaktery d-ových IR konečné grupy G na komplexních konečně-dim. prostorech a nechť jsou tyto IR neekvivalentní pro $\mu \neq \nu$.
Potom platí

$$\sum_g \chi^\mu(g^{-1})\,\chi^\nu(g) = \sum_g \chi^\mu(g)^*\,\chi^\nu(g) = \#G\,\delta_{\mu\nu}$$

- lze zobecnit pro kompaktní LG pomocí $\sum_g \to \int_G dg$

<u>Dk:</u> • $\sum_g D^\mu(g^{-1})_{ij}\,D^\nu(g)_{kl} = \frac{\#G}{d_\mu}\,\delta_{kj}\,\delta_{il}\,\delta_{\mu\nu} \overset{i=j}{\underset{k=l}{\Rightarrow}} \sum_g \sum_{ik} D^\mu(g^{-1})_{ii}\,D^\nu(g)_{kk} = \frac{\#G}{d_\mu}\delta_{\mu\nu}\sum_{ik}\delta_{ik}$

$$\Rightarrow \sum_g \chi^\mu(g^{-1})\,\chi^\nu(g) = \#G\,\delta_{\mu\nu}.$$

- Navíc lib. konečně-dim repre ~ unitární repre a vl. čísla unit. repre jsou komplexní jednotky: $|\lambda_i|^2=1$
$\Rightarrow \lambda_i^{-1} = \lambda_i^* \Rightarrow \chi(g^{-1}) = \chi(g)^* \rightarrow$ /ekvivalence/ $\Rightarrow$ platí pro $\forall$ konečně-dim. repre $\boxtimes$

- $\forall$ prvky z (g) mají stejné charaktery $\Rightarrow$ relace ortogonality lze zapsat pomocí <u>charakterů tříd</u>

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_c} n_k\,\chi^\mu[(g_k)]^*\,\chi^\nu[(g_k)] = \#G\,\delta_{\mu\nu}}$$

  - k běží přes <u>různé</u> třídy (g_k)
  - $n_k = \#(g_k)$; N_c ... počet různých (g)

<u>Důsledek</u> • charaktery neekviv. IR tvoří ortogonální systém vektorů v N_c-rozměrném vekt. prostoru

$$\Rightarrow \boxed{\#IR(\text{neekviv.}) \leq N_c}$$

- ukážeme, že platí rovnost

Věta 17: Je-li G konečná nebo kompaktní Lieova, (33)
potom je rovnost charakterů dvou repre. postačující podmínkou jejich ekvivalence.

Dk: 1, Nechť jsou ρ^μ a ρ^ν dvě neekviv. IR se stejnými charaktery. Z věty 16 máme

$$\sum_g \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = 0 \quad \text{a zároveň má platit } \chi^\mu(g) = \chi^\nu(g) \; \forall g$$

$$\underset{V16}{\Rightarrow} \sum_g \chi^\mu(g)^* \chi^\mu(g) = \#G \quad \lightning$$

2, Nechť jsou ρ^μ a ρ^ν reducibilní $\underset{\text{Maschke}}{\overset{V13}{\Rightarrow}}$ jsou úplně reducibilní:

$$\rho^\mu = \bigoplus_\alpha m^\mu_\alpha \rho^\alpha \qquad \rho^\nu = \bigoplus_\alpha m^\nu_\alpha \rho^\alpha \quad ; \rho^\alpha \text{ jsou IR grupy } G$$

$$\Rightarrow \chi^\mu(g) = \sum_\alpha m^\mu_\alpha \chi^\alpha(g) \qquad \chi^\nu(g) = \sum_\alpha m^\nu_\alpha \chi^\alpha(g)$$

$$\bullet\ \chi^\mu(g) = \chi^\nu(g) \Rightarrow \sum_\alpha (m^\mu_\alpha - m^\nu_\alpha) \chi^\alpha(g) = 0 \quad \forall g$$

$$\Rightarrow \sum_\alpha \sum_g (m^\mu_\alpha - m^\nu_\alpha) \chi^{\alpha'}(g)^* \chi^\alpha(g) \overset{V16}{=} \sum_\alpha (m^\mu_\alpha - m^\nu_\alpha) \delta_{\alpha\alpha'} \#G = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m^\mu_{\alpha'} = m^\nu_{\alpha'} \quad \forall \alpha}$$

$\Rightarrow \rho^\mu$ a ρ^ν mají stejný rozklad na IR

$\Rightarrow \rho^\mu \sim \rho^\nu$ $\boxtimes$ (Pro LG pomocí $\int d\mu(g)$)

NB: Po cestě jsme zároveň dokázali

Věta 18: Nechť (ρ, V) je reducibilní repre konečné G s rozkladem $\rho = \bigoplus_\alpha m_\alpha \rho^\alpha$ na IR. Potom

$$m_\alpha = \frac{1}{\#G} \sum_g \chi^\alpha(g)^* \chi(g)$$

NB: Tato věta implikuje jednoznačnost rozkladu reduc. reprezentací

IREDUCIBILNÍ REPREZENTACE KONEČNÝCH GRUP

NB: • $\#IR \leq$ počet tříd sdruž. prvků
• $\sum_\mu d_\mu \leq \#G$
• v obou případech platí rovnost

Def: Regulární repre. konečné grupy G je

$$D^r(g_s)^k_\ell = \begin{cases} 1 & \text{pro } g_s g_\ell = g_k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

• $\dim D^r = \#G$
• v každém řádku a sloupci je právě jedna 1 (přemsp.)
• je to legitimní repre:

a, $D^r(e) = \mathbb{1}$

b, $\sum_\ell D^r(g_r)^k_\ell D^r(g_s)^\ell_m = / g_r g_\ell = g_k \ \& \ g_s g_m = g_\ell$

$\Rightarrow g_r g_s g_m = g_k / = D^r(g_r g_s)^k_m$ ✓

Př:

	e	a	b
a	b	e	
b	e	a	

$$\Rightarrow D^r(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ D^r(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ D^r(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• charaktery D^r: • $\chi^r(e) = \#G$
• $\chi^r(g \neq e) = 0$ ... nenulové prvky jsou mimo diagonálu ($g_s g_k = g_k \Rightarrow g_s = e$)

Věta 19:

$$\sum_\mu d_\mu^2 = \#G \quad (\Sigma \text{ přes tříd ekvivalentní } IR)$$

Dk: • rozklad regulární reprezentace (Maschke: D^r je úplně red.)

$$D^r = \bigoplus_\mu m^r_\mu D^\mu \quad \& \quad m^r_\mu = \frac{1}{\#G} \sum_g \chi^\mu(g)^* \chi^r(g)$$

$$= \frac{1}{\#G} \chi^\mu(e)^* \chi^r(g) = d_\mu$$

$\Rightarrow$ každá IR je v D^r obsažena d_μ-krát $\Rightarrow$
$D^r = \bigoplus d_\mu D^\mu \Rightarrow \chi^r(g) = \sum d_\mu \chi^\mu(g) \Rightarrow / g = e / \Rightarrow \#G = \sum d_\mu^2$ $\boxtimes$

Lemma: $C \subset G$ & $gCg^{-1} = C \quad \forall g \in G \Leftrightarrow C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$

- C nemusí být podgrupa
- suma běží přes všechny různé třídy sdružených prvků
- $a_k \geq 0$ celé $\Rightarrow$ prvky se v C mohou opakovat
- srov. $H \subset G$ normální $\Leftrightarrow$ H sestává pouze z celých (g_k)

Dk: $\Leftarrow$| $g(g_k)g^{-1} = (g_k)$ plyne z teorému o přeusp.:

$\Rightarrow$| Nechť $C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k) + R$ & $\exists a \in R : (a) \not\subset R$

- protože $g(g_k)g^{-1} = (g_k) \quad \forall (g_k) \; \forall g \in G$, musí z předpokladu

platit $gRg^{-1} = R$ ($\forall (g_k)$ můžu z C vyjmout)

$\Rightarrow gag^{-1} \in R \quad \forall g \Rightarrow (a) \subset R$ ↯ $\boxtimes$

Def: Násobení tříd sdružených prvků

$$(g_k)(g_\ell) = \{ g_i g_j \mid g_i \in (g_k), g_j \in (g_\ell) \}$$ vč. násobnosti!

Př: $C_{3v} = (E) + (C_3) + (\sigma_v) = \{E\} + \{C_3, C_3^2\} + \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

- $(C_3)(C_3) = \{C_3^2, E, E, C_3\} = 2(E) + (C_3)$
- $(C_3)(\sigma_v) = \{\sigma_v', \sigma_v'', \sigma_v, \sigma_v'', \sigma_v, \sigma_v'\} = 2(\sigma_v)$

Věta 20:
$$(g_i)(g_j) = \sum_{(g_k)} c_{ij}^k (g_k)$$

- suma běží přes N_c různých tříd (g_k)
- c_{ij}^k se nazývají konstanty tříd (class constants)

Dk: $g(g_i)(g_j)g^{-1} = g(g_i)g^{-1}g(g_j)g^{-1} = (g_i)(g_j) \Rightarrow$ /lemma/

$\Rightarrow (g_i)(g_j) = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$ $\boxtimes$

Lemma: Nechť (ρ^α, V) je IR grupy G na d_α-dim. prostoru V.

Potom
$$m_i m_j \chi^\alpha(g_i) \chi^\alpha(g_j) = d_\alpha \sum_{(g_k)} c_{ij}^k m_k \chi^\alpha(g_k).$$

- $m_i = \#(g_i)$, suma běží přes různé (g_k)

Dk: • $A_k = \sum_{h \in (g_k)} D^{\mu}(h)$ & $g(g_k) \overset{(*)}{=} (g_k) g \quad \forall g \in G$

$\Rightarrow D^{\mu}(g) A_k = A_k D^{\mu}(g)$

(*) neplatí prvek po prvku $\Rightarrow$ musíme konstruovat $A_k = \sum_h$

$\overset{SL2}{\Rightarrow} A_k = \lambda \mathbb{1}$ pro D^{μ} maticovou IR

• $\mathrm{Tr}\, A_k = \lambda d_{\mu} = m_k \chi^{\mu}(g_k) \Rightarrow A_k = \frac{m_k}{d_{\mu}} \chi^{\mu}(g_k) \mathbb{1}$

• věta 20 $\Rightarrow A_i A_j \overset{(**)}{=} \sum_k c_{ij}^k A_k = \sum_k c_{ij}^k \frac{m_k}{d_{\mu}} \chi^{\mu}(g_k) \mathbb{1}$

(**)

$(g_i)(g_j) = \sum_k c_{ij}^k (g_k)$ prvek po prvku $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{h_i \in (g_i)} \sum_{h_j \in (g_j)} h_i h_j = \sum_k c_{ij}^k \sum_{h_k \in (g_k)} h_k$

• $\mathrm{Tr}\, A_i A_j = \sum_k c_{ij}^k \frac{m_k}{d_{\mu}} \chi^{\mu}(g_k) d_{\mu} \underset{\Uparrow}{=} \frac{m_i}{d_{\mu}} \frac{m_j}{d_{\mu}} \chi^{\mu}(g_i) \chi^{\mu}(g_j) d_{\mu}$

$\mathrm{Tr}(\mathbb{1} \cdot \mathbb{1}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = d_{\mu}$ $\boxtimes$

Věta 21: Pro konečné grupy je počet neekvivalentních IR rovno počtu tříd sdružených prvků.

Dk:(*) N_r ... počet IR (neekviv.) ; N_c ... počet různých (g_k)

1, relace ortogonality:

$$\sum_{(g_k)} m_k \chi^{\mu}(g_k)^* \chi^{\nu}(g_k) = \#G \delta_{\mu\nu} \Rightarrow N_r \leq N_c$$

($\exists$ max. N_c og. vektorů v N_c-dim vekt. prostoru)

2, $m_j \sum_{\mu} \chi^{\mu}(g_i)^* \chi^{\mu}(g_j) = \#G\, \delta_{ij} \Rightarrow N_c \leq N_r$:

• $m_i m_j \chi^{\mu}(g_i) \chi^{\mu}(g_j) = d_{\mu} \sum_k c_{ij}^k m_k \chi^{\mu}(g_k)$ pro ρ^{μ} IR

• reg. repre. $\chi^{r}(g_k) = \delta_{k1} \#G = \sum_{\alpha} d_{\alpha} \chi^{\alpha}(g_k)$; $(g_1) = (e)$

$\Rightarrow m_i m_j \sum_{\mu} \chi^{\mu}(g_i) \chi^{\mu}(g_j) = \sum_k c_{ij}^k m_k \chi^{r}(g_k) = c_{ij}^1 \#G$

(*) kratší, méně technický Dk viz Elliott, Dawber (1979), str. 66

• $c_{ij}^1 = ?$: $(g_i)(g_j) = c_{ij}^1 (e) + \sum_{k=2}^{N_c} c_{ij}^k (g_k)$

$\rightarrow c_{ij}^1 = n_i \delta_{ij'}$, kde $(g_{j'})$ je třída sdružených prvků inverzních ke (g_j)

a) $\underline{n_{j'} = n_j}$:

$a \sim b \in (g_j)$, $a^{-1} \in (g_{j'}) \Rightarrow b = gag^{-1} \Rightarrow b^{-1} = ga^{-1}g^{-1} \sim a^{-1}$

$\Rightarrow b^{-1} \in (g_{j'})$

b) $\chi^\mu(g_{j'}) = \chi^\mu(g_j)^* \Leftarrow$ ekvivalence s unit. repre

$\Rightarrow n_i n_j \sum_\mu \chi^\mu(g_i)\chi^\mu(g_j) = n_i \delta_{ij'} \#G$

$\Rightarrow$ / i musí být inverz. k j / $\Rightarrow n_j \sum_\mu \chi^\mu(g_i)^* \chi^\mu(g_j) = \delta_{ij} \#G$

$\Rightarrow N_c \leq N_r$ & $N_r \leq N_c \Rightarrow N_r = N_c$ $\boxtimes$

Věta 22: (Frobeniovo kritérium ireducibility) (*) Jedná se vlastně jen o spec. případ rel. og. pro charaktery

Reprezentace (ρ, V) konečné grupy je ireducibilní

$$\Leftrightarrow \sum_g \chi^*(g)\chi(g) = \sum_{(g_k)} n_k \chi^*(g_k)\chi(g_k) = \#G$$

Dk: $\rho = \bigoplus \alpha_\mu \rho^\mu \overset{V18}{\Rightarrow} \alpha_\mu = \frac{1}{\#G}\sum_g \chi^\mu(g)^* \chi(g) \in \mathbb{N}_0$ (+)

$$\Rightarrow \chi(g) = \sum_\mu \alpha_\mu \chi^\mu(g)$$

$$\Rightarrow \sum_g \chi(g)^* \chi(g) = \sum_g \sum_{\mu\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = \#G \sum_\mu \alpha_\mu^2$$

• pro ρ IR je $\rho = \rho^\nu \Rightarrow \alpha_\mu = \delta_{\mu\nu} \Rightarrow \sum_\mu \alpha_\mu^2 = 1$

• pro ρ reduc. $\exists$ alesp. dvě $\alpha_{\mu_1} > 0$ a $\alpha_{\mu_2} > 0 \Rightarrow \sum_\mu \alpha_\mu^2 > 1$

$\boxtimes$

Pozn: (k jednoznačnosti rozkladu (+)): jednoznačnost rozkladu (ρ, V) na IR neimplikuje, že také rozklad V na invar. podpr. je jednoznačný; např. je-li $\alpha_\mu > 1$ pro nějaké μ, příslušné invar. podprostory lze míchat: $V_1 = \mathcal{L}(e_1)$ a $V_1' = \mathcal{L}(e_1') \Rightarrow \mathcal{L}(\alpha e_1 + \beta e_2)$ je také invar.

NALEZENÍ TABULKY CHARAKTERŮ BODOVÉ GRUPY

1, $N_{IR} = N_C$

2, $\sum d_\alpha^2 = \#G$

3, $\exists$ triv. repre

3b, $\exists$ pseudoskal. repre (někdy)

4, $\exists$ vec. repre a (případně) pseudovec. repre

$\Rightarrow$ buď je IR nebo $1 \oplus 1 \oplus 1$ nebo $1 \oplus 2$

- 1-dim umím zkonstruovat jako transf. konkrétní souřadnice, 2-dim dopočtu z $\chi^{vec} = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}$ a χ^{vec} znám jako $\chi^{vec}(\varphi)$
- stejně pseudovec. – může dát celé nebo částečně taktéž, co už máme

vekt. repre $O(3)$
$\chi[C_{\vec{n}}(\varphi)] = 1 + 2\cos\varphi$
$\chi[S_{\vec{n}}(\varphi)] = -1 + 2\cos\varphi$
pseudovec. repre $O(3)$
$\chi(C_{\vec{n}}(\varphi)) = 1 + 2\cos\varphi$
$\chi(S_{\vec{n}}(\varphi)) = 1 - 2\cos\varphi$
pro $O(3)$ se jedná o 3-dim IR

5, • ortogonalita sloupců:

$$n_j \sum_\alpha \chi^\alpha(C_i)^* \chi^\alpha(C_j) = \delta_{ij} \#G$$

- ortogonalita řádků:

$$\sum_{(g_k)} n_k \chi^\alpha(g_k)^* \chi^\beta(g_k) = \delta_{\alpha\beta} \#G$$

!

6, • pro 1-dim repre musí platit $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$

- Frobeniovo krit. pro řádky: $\sum_{(g_k)} n_k \chi^\alpha(g_k)\chi^\alpha(g_k) = \#G$

(• transformace kvadr. fcí a jejich rozklad)

$D_{3h} \to C_3,\ 3\times C_2,\ \sigma_h,\ S_3,\ 3\times\sigma_v$

$\Rightarrow \{E, \underbrace{C_3, C_3^2}, \underbrace{C_2, C_2', C_2''}, \underbrace{\sigma_h}, \underbrace{S_3, S_3^5}, \underbrace{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''}\}$

Transformace vektorů a pseudovektorů při přís. $O(3)$ na $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ vektorová a pseudovekt. repre $O(3)$

- ~~Bto~~ transformace vektorů

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i \xrightarrow{g} \vec{x}' = \sum_i x_i \vec{e}_i' \qquad x_i' = \sum_k D_{ik}(g)\, x_k$$

rotace, nevl. rotace

$\Rightarrow D(g)$ je 3-rozměrná repre $O(3)$

- vlaží $\mathbb{R}^3$ mohu volit ~~vektorovou~~ vektory nebo pseudovektory

$\Rightarrow$ 2 různé repre (transf. se jinak)

- pro $O(3)$, ~~Bto~~ $SO(3)$ a další podgr. ~~atp.~~ jde o ired. 3d repre, pro některé další bodové podgrupy (C_n, D_n, C_{nv}) jde o reducibilní repre ($z \parallel C_n \Rightarrow (z)$ & (x,y) jsou ired)

$\Rightarrow$ jak vypadá obecná $D(C_\varphi^{\vec{n}}), D(S_\varphi^{\vec{n}})$ a jaké jsou charaktery?

vl. nebo nevl.

NB: třídy: rotace o stejný ~~úhe~~ úhel kolem lib. osy (lze je převést na sebe ~~jinou~~ nějakou operací (rotací) z grupy)

$$C_\varphi = \tilde{C}_2^{-1} C_\varphi' \tilde{C}_2 \Leftrightarrow C_\varphi' \tilde{C}_2 = \tilde{C}_2 C_\varphi$$

otočím $\vec{n} \to \vec{n}'$ ~~a~~ potom o φ kolem $\vec{n}'$

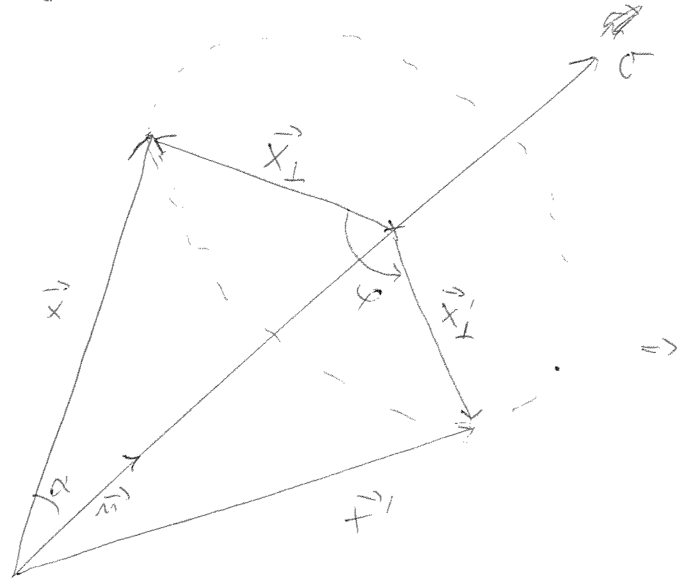
otočím o φ kolem $\vec{n}$ a potom $\vec{n}$ na $\vec{n}'$

Př: ~~reprezentace SO(3)~~ 3D reprezentace SO(3) (1)

(~~značná~~ až u axiál. na vekt/pseudovekt. repre O(3))

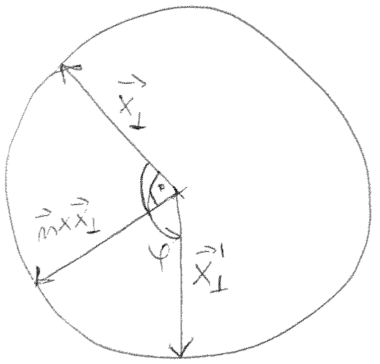
působení SO(3) na $\mathbb{R}^3$

• rotace o φ kolem $\vec{n}$:



$$\vec{x}_\perp = \vec{x} - (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{x}' = (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} + \vec{x}'_\perp$$



$\vec{x}_\perp$ a $\vec{n}\times\vec{x}_\perp$ je dobrá báze v rovině kolmé na $\vec{n}$, oba vektory mají velikost $c = |\vec{x}|\sin\alpha$
($|\vec{n}\times\vec{x}| = |x|\sin\alpha$ zřejmé, $\vec{x}_\perp$ je projekce $\vec{x}$ na rovinu $\perp$ k $\vec{n}$ $\Rightarrow$ také zřejmé)

$$\vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{x}' = (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} + (\vec{x} - (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n})\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi$$

$$\boxed{\vec{x}' = \vec{x}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)(\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi}$$

$$(\vec{x}\times\vec{n})_i = \varepsilon_{ijk}x_j n_k$$

$$\Rightarrow x'_i = x_i\cos\varphi + (1-\cos\varphi)n_j x_j n_i - \sin\varphi\,\varepsilon_{ijk}x_j n_k$$

$$\Rightarrow \boxed{D_{ij}(C_\varphi^{\vec{n}}) = \delta_{ij}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)n_i n_j - \sin\varphi\, n_k\varepsilon_{ijk}}$$ – ireducibilní

Spec kolem z: $D(C_\varphi^{(z)}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$