MATICOVÉ ELEMENTY INVARIANTNÍCH OPERÁTORŮ

Def: Invariantní skalární operátor

$$\tilde{\Omega} = \mathcal{U}(g)\,\Omega\,\mathcal{U}(g)^+ = \Omega \qquad \text{při působení grupy na } \mathcal{H}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{U}(g)\Omega = \Omega\,\mathcal{U}(g) \quad \text{pro } \mathcal{U}(g)^{-1} = \mathcal{U}(g)^+ \qquad g \mapsto \mathcal{U}(g)$$

- jak vypadá maticový element

$$M_{kl}^{\mu\nu} = \langle \psi_k^\mu | \Omega | \varphi_l^\nu \rangle$$

pro $\psi_k^\mu, \varphi_l^\nu$ dvě báze IR ρ^μ a ρ^ν grupy G (např.: vl. stavy příslušné energiím E_μ, E_ν nebo 1s a 2s báze reprezentací A_1, E grupy C_{3v} z příkladu H_3^{2+})

- $\mathcal{U}(g)\varphi_l^\nu = \sum_i \varphi_i^\nu D^\nu(g)_{il}$ ... φ_l^ν je báze IR ρ^ν
- $\varphi_l'^\nu = \Omega\varphi_l^\nu$ ... působení Ω na φ_l^ν

$$\Rightarrow \mathcal{U}(g)\varphi_l'^\nu = \mathcal{U}(g)\,\Omega\,\mathcal{U}(g)^+\mathcal{U}(g)\varphi_l^\nu = \Omega\,\mathcal{U}(g)\varphi_l^\nu = \Omega\sum_i \varphi_i^\nu D^\nu(g)_{il}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(g)\varphi_l'^\nu = \sum_i \varphi_i'^\nu D^\nu(g)_{il}$$

$\Rightarrow$ $\varphi_l'^\nu$ je opět báze téže IR ρ^ν

- element $M_{kl}^{\mu\nu}$ se nemění při působení G: (nic nového, tak jsme definovali transf. operátoru při půs. grupy; platí i pro neinvar. operátory)

$$\mathcal{U}(g)M_{kl} \equiv \langle \mathcal{U}(g)\psi_k^\mu | \mathcal{U}(g)\,\Omega\,\mathcal{U}(g)^+ | \mathcal{U}(g)\varphi_l^\nu \rangle$$

$$= \langle \psi_k^\mu | \mathcal{U}(g)^+\mathcal{U}(g)\,\Omega\,\mathcal{U}(g)^+\mathcal{U}(g) | \varphi_l^\nu \rangle = \langle \psi_k^\mu | \Omega | \varphi_l^\nu \rangle$$

- zároveň ale platí

$$M_{kl} = \mathcal{U}(g)M_{kl} \equiv \langle \mathcal{U}(g)\psi_k^\mu | \mathcal{U}(g)\,\Omega\,\varphi_l^\nu \rangle \overset{\Omega \text{ invar.}}{=} \langle \mathcal{U}(g)\psi_k^\mu | \Omega | \mathcal{U}(g)\varphi_l^\nu \rangle$$

$$(*)\ \text{otoč} \quad = \sum_{ij} D_{ik}^\mu(g)^* D_{jl}(g)\,\langle \psi_i^\mu | \Omega | \varphi_j^\nu \rangle \qquad \Big/ \sum_g, \ \mathcal{U}(g)M_{kl} = M_{kl}$$

$$\#G\,M_{kl} = \sum_{ij} \langle \psi_i^\mu | \Omega | \varphi_j^\nu \rangle \cdot \frac{\#G}{d_\mu}\,\delta_{\mu\nu}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}$$

$\Rightarrow M_{kl} = \langle \psi_k^{\mu} | \Omega | \varphi_l^{\nu} \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} h^{\mu}$

$h^{\mu} = \frac{1}{d_{\mu}} \sum_i \langle \psi_i^{\mu} | \Omega | \varphi_i^{\nu} \rangle$ ... redukovaný mat. element, nezávisí na k a l !

$\Rightarrow$ výběrová pravidla pro maticové elementy

a, element mezi dvěma stavy, transformujícími se podle různých IR, je nulový

b, element mezi stavy, které se transformují podle stejné IR ale různých sloupců, je také nulový

• Pozn.: pro $\mu = \nu$ jsou ψ^{μ} a φ^{μ} obecně různé báze téže IR
(2p a 3p, ψ_1 a ψ_4 v H_3^{2+}, ...)

$\Rightarrow$ MO-LCAO v H_3^{2+} – dokončení

Subdukované a indukované reprezentace

- subdukce: konstrukce reprezentace podgrupy z reprezentace grupy – přímočaré, omezíme se na prvky podgrupy
  – nezachovává obecně ireducibilitu
- indukce: konstrukce repre grupy z repre podgrupy
  – obecně také nezachovává ireducibilitu
  – pro grupu, která je semi-direktním součinem, lze konstruovat IR z ired. reprezentací její normální podgrupy, je-li tato abelovská ($G = A \circledS B$, A abelovská – Cornwell str. 120)

Subdukovaná reprezentace

Def: Nechť $T(g)$ jsou operátory reprezentace ς grupy G a $H \subset G$ je podgrupa. Potom

$$\varsigma_{\downarrow H} = \{T(h), h \in H\}$$

tvoří subdukovanou reprezentaci grupy H.

NB:
- nezaměňovat s podreprezentací $\varsigma_{\downarrow W}$, kde W je invar. podpr. reprezentačního vekt. prostoru

- $\varsigma_{\downarrow H}$ je obecně reducibilní i pro ς^{μ} IR grupy G

$$\varsigma^{\mu}_{\downarrow H} = \bigoplus_{\nu} \alpha_{\nu}^{\mu\downarrow H} \varsigma^{\nu}_{H} \Rightarrow \alpha_{\nu}^{\mu\downarrow H} = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi^{\nu}_{H}(h)^{*} \chi^{\mu}_{G}(h)$$

– $\chi^{\mu}_{G}(h)$ je charakter prvku $h \in H$ v IR ς^{μ}_{G} grupy G

Př: $G = C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

$H = C_s = \{E, \sigma_v\}$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	
A_1	1	1	1	$\to A' = A_1 \downarrow C_s$
A_2	1	1	-1	$\to A'' = A_2 \downarrow C_s$
E	2	-1	0	$\to A' \oplus A'' = E \downarrow C_s$

C_s	E	σ_v
A'	1	1
A''	1	-1

Indukované reprezentace pro konečné grupy

- nechť $H \subset G$ a $D_H(h)$ je d-dimenzionální reprezentace grupy H

$\Rightarrow$ indukovanou reprezentaci grupy G zkonstruujeme nalezením její báze:

1, rozklad G na levé třídy podle H:

$$G = p_1 H + p_2 H + \cdots + p_M H \qquad M = \frac{\#G}{\#H} \quad (\text{Lagrange})$$

- $p_i \in G$ jsou (pevně zvolení) zástupci jednotlivých tříd
- $p_1 = e$

2, $\{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ je báze D_H $\Rightarrow$ $\boxed{T(h)\phi_i = \sum_j \phi_j D_H(h)_{ji}}$ $\forall h \in H$

$\Rightarrow$ definujeme

$$\boxed{\phi_{ti} = T(p_t)\phi_i} \qquad t = 1, \dots, M \quad \text{a} \quad i = 1, \dots, d$$

$\Rightarrow$ ϕ_{ti} tvoří bázi Md-dim reprezentace grupy G:
(bez dk předpokládáme, že dostaneme LN vektory)

$$T(g)\phi_{ti} = \sum_{sj} \phi_{sj} D_G(g)_{sj,ti} \ ?$$

$$T(g)\phi_{ti} = T(gp_t)\phi_i = T(p_s p_s^{-1} g p_t)\phi_i = T(p_s) T(p_s^{-1} g p_t)\phi_i$$

/ p_s volím tak aby $p_s^{-1} g p_t \in H \Leftrightarrow g p_t \in p_s H$
p_s určitě $\exists!$, protože každý prvek z G patří do právě 1 třídy /

$$= T(p_s) \sum_j \phi_j D_H(p_s^{-1} g p_t)_{ji} = \sum_j \phi_{sj} D_H(p_s^{-1} g p_t)_{ji} \quad \text{pro } g p_t \in p_s H$$

$\Rightarrow$ definuji $\delta_{st}(g) = \begin{cases} 1 & g p_t \in p_s H \\ 0 & g p_t \notin p_s H \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{D_G(g)_{sj,ti} = \delta_{st}(g) D_H(p_s^{-1} g p_t)_{ji}}$$

Indukovaná repre G

$D_G = D_H \uparrow G$

$D_G(g)_{sj,ti}$ je reprezentace:

1, $g = e \Rightarrow \delta_{st}(e) = 1 \Leftrightarrow \exists h: e p_t = p_s h \Rightarrow p_t \in p_s H \Rightarrow p_t = p_s$

$$\Rightarrow D_H(p_s^{-1} e p_s)_{ji} = D_H(e)_{ji} = \delta_{ji} = (\mathbb{1}_{d\times d})_{ji}$$

$$\Rightarrow s,t = 1,\dots,M \Rightarrow D_G(e)_{sj,ti} = \mathbb{1}_{Md\times Md} \quad \checkmark$$

2, $\sum_{rk} D_G(g)_{sj,rk} D_G(g')_{rk,ti} = \sum_{rk} \delta_{sr}(g)\delta_{rt}(g') D_H(p_s^{-1} g p_r)_{jk} D_H(p_r^{-1} g p_t)_{ki}$

$= \Big/ g p_r = p_s h \;\&\; g' p_t = p_r h' \overset{(1)h'}{\Rightarrow} g p_r h' = gg' p_t = p_s h h' = p_s h''$

$\Rightarrow \sum_r \delta_{sr}(g)\delta_{rt}(g') = \delta_{st}(gg')$, neboť navíc $\exists! r \; g' p_t \in p_r H \Big/$

$= \delta_{st}(gg') D(p_s^{-1} g g' p_t)_{ji}$

- $\sum_k$ je násobení matic
- i zde že $\sum_r$ přispělo právě 1 p_r & $p_r p_r^{-1} = e$

$\boxtimes$

Tvrzení: D_H je unitární $\Rightarrow D_G = D_H \uparrow G$ je unitární.

Dk: $[D_G(g)^{-1}]_{sj,ti} \overset{\text{je to repre}}{=} [D_G(g^{-1})]_{sj,ti} = \delta_{st}(g^{-1}) D_H(p_s^{-1} g^{-1} p_t)_{ji}$

$= \Big/ g^{-1} p_t = p_s h \Rightarrow g p_s = p_t h^{-1} \Rightarrow \delta_{st}(g^{-1}) = \delta_{ts}(g) \Big/ =$

$= \delta_{ts}(g) D_H((p_t^{-1} g p_s)^{-1})_{ji} \overset{\text{unit.}}{=} \delta_{ts}(g) D_H(p_t^{-1} g p_s)^*_{ij}$

$= [D(g)^+]_{sj,ti}$

$\boxtimes$

Charakter indukované reprezentace

$$\boxed{\chi_G(g) = \sum_{sj} \delta_{ss}(g) D_H(p_s^{-1} g p_s)_{jj} = \sum_s \delta_{ss}(g)\, \chi_H(\underbrace{p_s^{-1} g p_s}_{\in H})}$$

- sumaci přes M prvků p_s nahradíme sumací přes $g' \in G$ s podmínkou $g'^{-1} g g' \in H \Rightarrow$ místo 1 zástupce každé třídy beru $\forall$ #H zástupců:

$g p_s \in p_s H$ & $g' \in p_s H \Rightarrow g'^{-1} g g' = (p_s h')^{-1} g (p_s h')$

$= h'^{-1} p_s^{-1} g p_s h' = / p_s^{-1} g p_s \in H / = h'^{-1} h h' \in H$

$\Rightarrow g g' \in g' H = p_s H$

$\Rightarrow$ dělím počtem prvků v každé třídě (#H)

$$\Rightarrow \boxed{\chi_G(g) = \sum_s \delta_{ss}(g)\, \chi_H(p_s^{-1} g p_s) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{g' \\ g'^{-1} g g' \in H}} \chi_H(g'^{-1} g g')}$$

- první varianta obvykle vhodnější pro praktické počítání

<u>Rozklad indukované reprezentace na IR</u>

$$\rho_G^{\nu\uparrow G} = \bigoplus_\mu \alpha_\mu^{\nu\uparrow G} \rho_G^\mu \qquad \rho_H^{\mu\downarrow H} = \bigoplus_\nu \alpha_\nu^{\mu\downarrow H} \rho_H^\nu$$

(zajímají mě indukce a subdukce ireducibilních repre)

<u>Věta:</u> (Frobeniův reciproční teorém)

$\boxed{\alpha_\mu^{\nu\uparrow G} = \alpha_\nu^{\mu\downarrow H}}$ neboli

Kolikrát je IR ρ_G^μ grupy G zastoupena v rozkladu reprezentace $\rho^{\nu\uparrow G}$ indukované z IR ρ_H^ν podgrupy H, tolikrát je IR ρ_H^ν zastoupena v rozkladu repre $\rho^{\mu\downarrow H}$ subdukované z IR ρ_G^μ.

$$\Rightarrow \chi_G^{\nu\uparrow G}(g) = \sum_\mu \alpha_\mu^{\nu\uparrow G} \chi_G^\mu(g) = \sum_\mu \alpha_\nu^{\mu\downarrow H} \chi_G^\mu(g)$$

<u>DK:</u> $\alpha_\mu^{\nu\uparrow G} = \frac{1}{\#G} \sum_g \chi_G^\mu(g)^* \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{g' \in G \\ g'^{-1} g g' \in H}} \chi_H^\nu(g'^{-1} g g') =$ / $h = g'^{-1} g g' \in H \Rightarrow g = g' h g'^{-1}$ $\Rightarrow \sum_g \sum_{g'} = \sum_h \sum_{g'}$

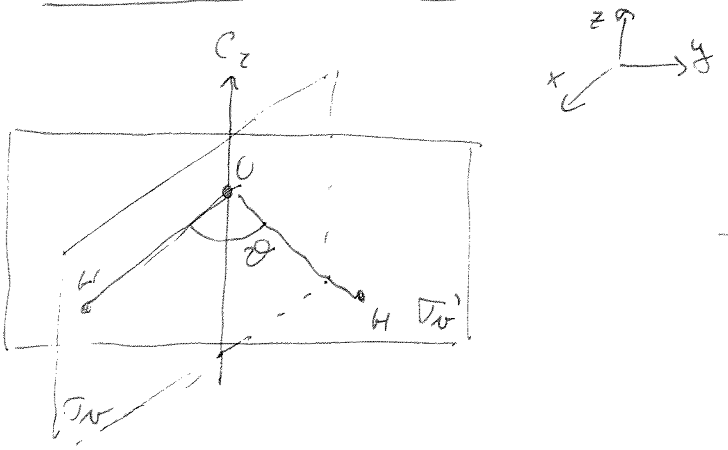
$$= \frac{1}{\#G} \frac{1}{\#H} \sum_h \chi_H^\nu(h) \sum_{g'} \chi_G^\mu(g' h g'^{-1})^* = \frac{1}{\#H} \sum_h \chi_H^\nu(h)\, \chi_G^\mu(h)^* = \left(\alpha_\nu^{\mu\downarrow H}\right)^* = \alpha_\nu^{\mu\downarrow H} \quad \boxtimes$$

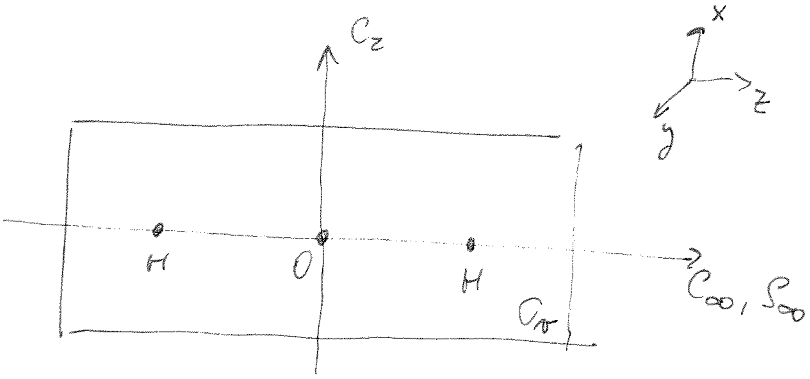
$\uparrow$ $\sum_{g'} = \#G \times$ totéž

$\uparrow$ $\alpha \in \mathbb{N}$ (*) otoč

PŘÍKLADY

1) H_2O^- v rovnovážné (C_{2v}) a lineární geometrii ($D_{\infty h}$)





C_{2v}	E	C_2	σ_v	σ_v'	
A_1	1	1	1	1	z
A_2	1	1	−1	−1	R_z
B_1	1	−1	1	−1	x, R_y
B_2	1	−1	−1	1	y, R_x

$D_{\infty h}$	E	$2C_\infty^\varphi \ldots$	$\infty\sigma_v$	i	$2S_\infty^\varphi \ldots$	∞C_2	
Π_g	2	$2\cos\varphi$	0	2	$-2\cos\varphi$	0	(R_x, R_y)
Π_u	2	$2\cos\varphi$	0	−2	$2\cos\varphi$	0	(x, y)
Π_g	2		0		−2	0	(R_z, R_x)
Π_u	2		0		2	0	(z, x)

NB: · ~~toto~~ je „std. orientace", kde $\langle z \rangle$ v C_{2v} a $D_{\infty h}$ nesouhlasí

$\Rightarrow$ přiřazení x, y, z do IR je zavádějící

korespondence:

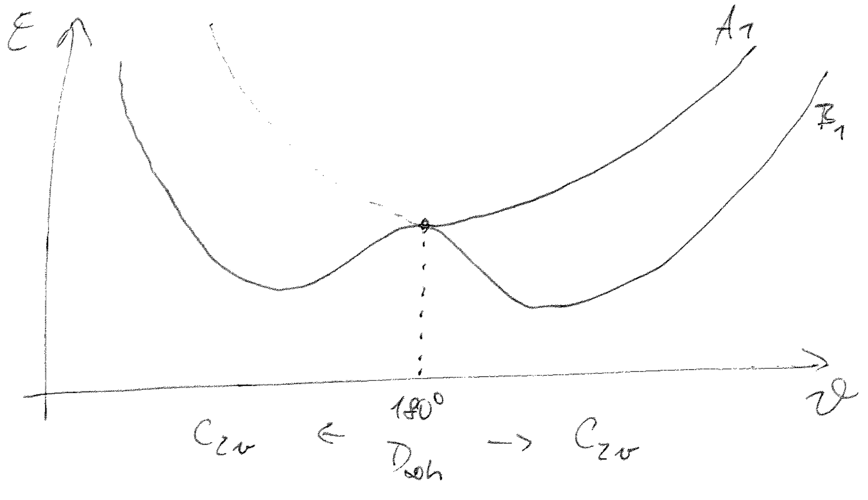
$E \leftrightarrow E \quad C_2 \leftrightarrow \infty C_2 \quad \sigma_v' \leftrightarrow \sigma_v \quad \sigma_v \leftrightarrow S_\infty^{2\pi}$

$x \leftrightarrow y \quad y \leftrightarrow z \quad z \leftrightarrow x$

$\Rightarrow$ štěpení

$\Pi_u = A_1 + B_1 \qquad (\chi(\sigma_v) = 2,\ \chi(\sigma_v') = \chi(C_2) = 0) = (z, x)$ ✓

$\Pi_g = A_2 + B_2 \qquad (\chi(\sigma_v) = -2,\ \chi(\sigma_v') = \chi(C_2) = 0) = (R_z, R_x)$ ✓

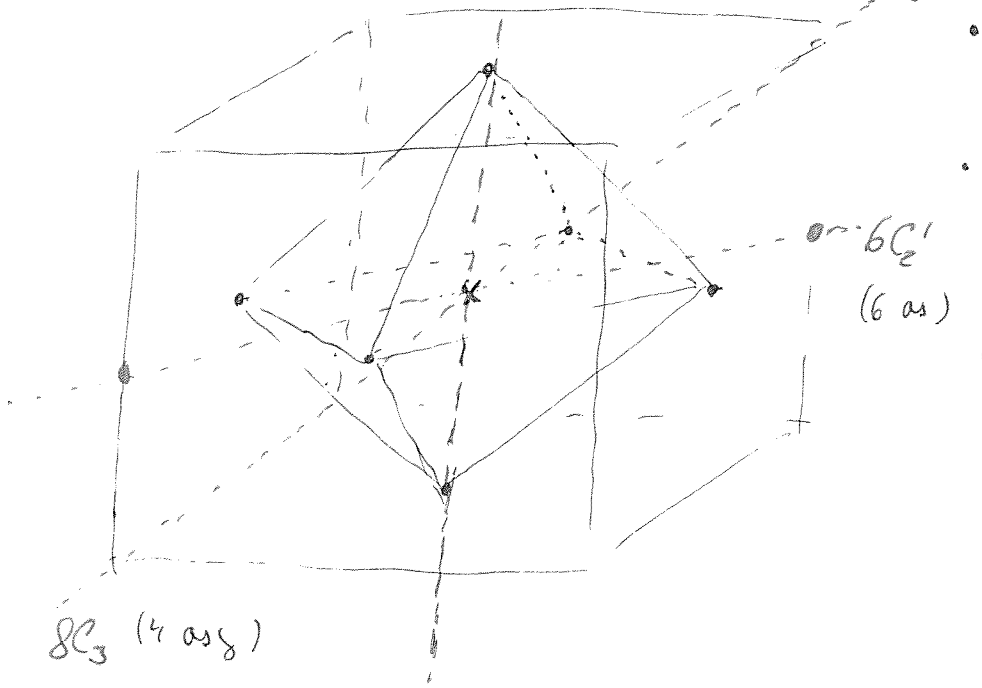


2, Štěpení hladin atomu v kubické krystalové mřížce

NB: charaktery $O(3)$: – bude nás zajímat jen $SO(3)$

$$\chi^l(C_\varphi) = \frac{\sin[(l+\frac{1}{2})\varphi]}{\sin \varphi/2} \qquad \chi^l(S_\varphi) = (-1)^l \chi^l(C_\varphi)$$

- atom (plná rotační symetrie) umístíme do středu buňky kubické krystalové mřížky



- grupa pravidelného osmistěnu $O_h \subset O(3)$
- pro zjednodušení budeme pracovat s grupou $O \subset SO(3)$ (neuvažujeme inverzi a nevlastní rotace)

O	E	$8C_3$	$3C_2=C_4^2$	$6C_2'$	$6C_4$	
A_1	1	1	1	1	1	$x^2+y^2+z^2$
A_2	1	1	1	−1	−1	
E	2	−1	2	0	0	$(2z^2-x^2-y^2, x^2-y^2)$
T_1	3	0	−1	−1	1	(x,y,z), (R_x,R_y,R_z)
T_2	3	0	−1	1	−1	(xy, xz, yz)
$l=0$	1	1	1	1	1	$\Rightarrow A_1$
$l=1$	3	0	−1	−1	1	$\Rightarrow T_1$
$l=2$	5	−1	1	1	−1	$\Rightarrow E + T_2$

24 elementů

$(1+2\cos x)$

$\cos\frac{5}{2}x = (1+2\cos x+2\cos 2x)$

$$\langle l=2|A_1\rangle = (5-8+3+6-6)/24 = 0$$
$$\langle l=2|A_2\rangle = (5-8+3-6+6)/24 = 0$$
$$\langle l=2|E\rangle = (10+8+6)/24 = 1$$
$$\langle l=2|T_1\rangle = (15-3-6-6)/24 = 0$$
$$\langle l=2|T_2\rangle = (15-3+6+6)/24 = 1$$

5x degenerovaná $\Rightarrow$ hladina se rozštěpí na 2x a 3x degenerované hladiny

NB: vlastně nic nového – už jsme viděli při konstruování tabulky charakterů, jen obráceně (rozklad vec. repre, zařazování kvadr. fcí...)

- mohli bychom pokračovat – krystal umístíme do elmg pole
  - ⇒ dojde k „protažení" základní buňky (řekněme podél ⟨z⟩)
  - ⇒ D_4 (jen 1 4-četná osa, zmizí 3-četné, C_2' budou dvě + dvě – spojující protější dlouhé hrany a protější stěny)

D_4	E	$C_2 = C_4^2$	$2C_4$	$2C_2'$	$2C_2''$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	−1	−1
B_1	1	1	−1	1	−1
B_2	1	1	−1	−1	1
E	2	−2	0	0	0

$\#D_4 = 8$

$C_2'' \leftrightarrow 6C_2'$ (hrany)

$C_2' \leftrightarrow 3C_2$ (byly 4-četné osy)

O	E	$3C_2 = C_4^2$	$6C_4$	$3C_2' = C_4^2$	$6C_2'$
E	2	2	0	2	0
T_2	3	−1	−1	−1	1

$\langle E | A_1 \rangle = (2+2+4)/8 = 1$

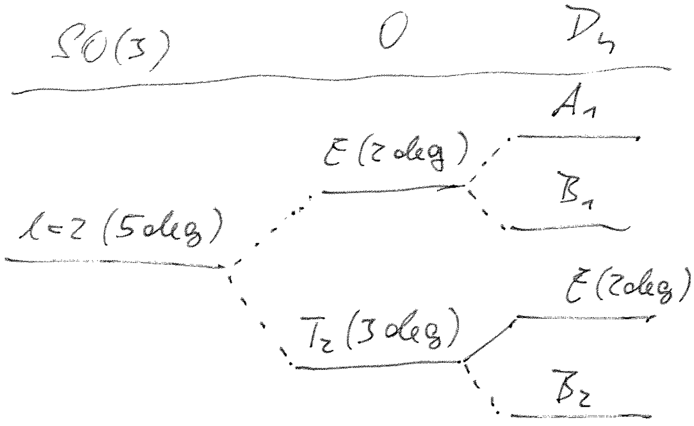
$\langle E | A_2 \rangle = (2+2-4) = 0$ ⇒ $E = A_1 + B_1$

$\langle E | B_1 \rangle = (2+2+4)/8 = 1$

$\langle T_2 | E \rangle = (6+2)/8 = 1$ ⇒ $T_2 = E + B_2$

$\langle T_2 | B_2 \rangle = (3-1+2+2+2)/8 = 1$

⇓ celkem štěpení



3, porucha v QM (z, obecněji)

H_0 (neporušený ham.) ↔ grupa G_0

↓ porucha V

$H = H_0 + V$ ↔ grupa $G \subset G_0$

a, $G = G_0$ … jen posunutí hladin bez změny degenerace, max. může dojít k sejmutí náhodné degenerace (redukované mat. elementy $h^\mu \neq h_0^\mu$, výběrová pravidla jinak stejná)

b, $G \subset G_0$ ⇒ sejmutí degenerace, viz 2, – „porucha" je krystalové pole pro atom

Cvičení: Indukovaná reprezentace a Frobeniův teorém

$$G = C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$$

$$H \sim C_s = \{E, \sigma_v\}$$

$$C_{3v} \neq C_3 \otimes C_s$$

C_s	E	σ_v
A'	1	1
A''	1	-1

• zkonstruujeme $A' \uparrow C_{3v}$

$$C_{3v} = \overset{p_1}{E}H + \overset{p_2}{C_3}H + \overset{p_3}{C_3^2}H = \{E, \sigma_v\} + \{C_3, \sigma_v''\} + \{C_3^2, \sigma_v'\}$$

E	C_3	C_3^2	σ_v	σ_v'	σ_v''
C_3	C_3^2	E	σ_v''	σ_v	σ_v'
C_3^2	E	C_3	σ_v'	σ_v''	σ_v
σ_v	σ_v'	σ_v''	E	C_3	C_3^2
σ_v'	σ_v''	σ_v	C_3^2	E	C_3
σ_v''	σ_v	σ_v'	C_3	C_3^2	E

$$D_G(g)_{sj,ti} = \delta_{st}(g)\, \underbrace{D_H(p_s^{-1} g\, p_s)}_{= 1 \ \forall g, p_s}$$

$$= \delta_{st}(g) = \begin{cases} 1 & g p_t \in p_s H \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$D_G(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \rightarrow \\ \downarrow s \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c|c} & E \quad C_3 \quad C_3^2 \\ \hline E & \\ C_3 & \\ C_3^2 & \end{array}$$

$$D_G(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$p_s = E \Rightarrow C_3 p_t \in \{E, \sigma_v\} \Rightarrow p_t = C_3^2$

$p_s = C_3 \Rightarrow C_3 p_t \in \{C_3, \sigma_v''\} \Rightarrow p_t = E$

$p_s = C_3^2 \Rightarrow C_3 p_t \in \{C_3^2, \sigma_v'\} \Rightarrow p_t = C_3$

$$D_G(C_3^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D(\sigma_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_v p_t \in \{E, \sigma_v\} \Rightarrow E$

$\sigma_v p_t \in \{C_3, \sigma_v''\} \Rightarrow C_3^2$

$\sigma_v p_t \in \{C_3^2, \sigma_v'\} \Rightarrow C_3$

$$D(\sigma_v') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C_3 \cdot \sigma_v \cdot \underbrace{C_3^{-1}}_{= C_3^2} \qquad D(\sigma_v'') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi^{A' \uparrow G}(E) = 3 \qquad \chi^{A' \uparrow G}(C_3) = 0 \qquad \chi^{A' \uparrow G}(\sigma_v) = 1$$

NB: srov. regulární reprezentace: je to indukov. reprez. triviální reprezentace podgrupy $\{E\}$ (d.cv.)

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0
$A'\uparrow G$	3	0	1
$A''\uparrow G$	3	0	-1

$\Rightarrow A'\uparrow G = A_1 \oplus E$

$\Rightarrow A''\uparrow G = A_2 \oplus E$

Subdukce:

C_s	E	σ_v	
$A_1 \downarrow C_s$	1	1	$= A'$
$A_2 \downarrow C_s$	1	-1	$= A''$
$E \downarrow C_s$	2	0	$= A' \oplus A''$

$\Rightarrow$ Frobenius: A' jednou v $A_1 \downarrow C_s$ a také A_1 jednou v $A'\uparrow G$
A'' jednou v $E \downarrow C_s$ a také E jednou v $A''\uparrow G$

• výpočet charakterů $A''\uparrow G$ přímo:

$$\chi^{\nu\uparrow G}(g) = \sum_s \delta_{ss}(g)\, \chi^{\nu}_H (p_s^{-1} g\, p_s^{-1}) \qquad \delta_{ss}(g) = 1 \Leftrightarrow g p_s \in p_s H$$

$g = E \Rightarrow E p_s \in p_s H \ \forall p_s \ \& \ \chi^{\nu}_H (p_s^{-1} E p_s) = \chi^{\nu}_H(E) = 1 \Rightarrow \chi(E) = 3$

$g = C_3 \Rightarrow C_3 p_s \in p_s H$ nelze splnit $\Rightarrow \chi(C_3) = 0$

$g = \sigma_v \Rightarrow \sigma_v p_s \in p_s H$ pro $p_s = E \Rightarrow \chi^{\nu}_H(\sigma_v) = -1 \Rightarrow \chi(\sigma_v) = -1$