LIEOVY GRUPY

Jemný úvod a příklad:

- spojitá grupa – nekonečná grupa, jejíž prvky jsou parametrizovány spojitě v reálnými parametry x_i:

$$g(x_1, \dots, x_r) \in G$$

r … dimenze G

- pro grupové násobení platí

$$g(x_1, \dots, x_r)\, g(y_1, \dots, y_r) = g(z_1, \dots, z_r)$$

$$z_i = \phi_i(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r)$$

- stejně tak inverze

$$g^{-1}(x_1, \dots, x_r) = g(y_1, \dots, y_r)$$

$$y_i = \zeta_i(x_1, \dots, x_r)$$

- jsou-li ϕ_i a ζ_i C^∞, budeme mluvit o Lieově grupě
- lineární Lieovy grupy – maticové grupy, kde jednotlivé mat. elementy jsou funkcemi $\{x_i\}$ (přesněji lin grupa (v nějaké mat. grupě)

Příklad $G = SO(3)$ $(= R_3)$ … grupa rotací v $\mathbb{R}^3$

$R \in SO(3)$: a, R je matice 3×3 s $\mathbb{R}$ koeficienty
b, $R^T R = \mathbb{1}$
c, $\det R = 1$

- grupa je 3-rozměrná (b ⇒ 6 podmínek, c už nepřináší nic nového – uvidíme později)
  - parametrizace např. Eulerovými úhly
- grupa není komutativní: $R(\vec{\varphi})R(\vec{\vartheta}) \neq R(\vec{\vartheta})R(\vec{\varphi})$
- Marius Sophus Lie (1842 – 1899) – norský fyzik – studujme infinitezimální rotace v okolí jednotky:

$$R(\vec{\varphi}) \simeq \mathbb{1} + A \quad \dots \text{ linearizace } - A = O(\varphi)$$

- $R^T R = \mathbb{1} \Rightarrow (\mathbb{1} + A^T)(\mathbb{1} + A) \simeq \mathbb{1} + A^T + A = \mathbb{1} \Rightarrow A^T = -A$

$\Rightarrow A$ jsou anti-symetrické matice 3×3

- báze antisym. matic ≡ generátory infinit. transformací

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

> NB: obvykle se generátory definují jako hermitovské $\Rightarrow J_\alpha \to i J_\alpha$

$$\Rightarrow R = \mathbb{1} + \varphi_i J_i + o(\varphi)$$

- rotace o konečný úhel:
  - $R(\varphi) = \lim_{N\to\infty} R\left(\frac{\varphi}{N}\right)^N = \left(\mathbb{1} + \frac{\varphi}{N} A\right)^N = \exp(\varphi_i J_i)$, $\quad A = \varphi_i J_i$

$\Rightarrow$ od generátorů infinitezimálních transformací k obecné konečné rotaci se dostaneme exp. zobrazením

- platí identita $\det R = \exp(\mathrm{Tr} \log R)$
  - lze odvodit přes $R = S^{-1} \Lambda S$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
  - $R \simeq \mathbb{1} + A \Rightarrow \log R \simeq A \Rightarrow \det R = \exp(0) = 1$

$\Rightarrow \det R = 1$ skutečně nepřináší další podmínku navíc

$\Rightarrow$ zároveň vidíme, že exp. zobrazení z algebry generátorů nemusí pokrývat celou grupu:

$O(3)$: $R^T R = \mathbb{1}$

$\Rightarrow \det(R^T R) = \det(R^T) \det R = (\det R)^2 = 1$

$\Rightarrow \det R = \pm 1$

- $A^T = -A$ jsme ale odvodili bez použití $\det = 1$
  - $\Rightarrow O(3)$ má stejnou algebru, matici R s $\det R = -1$ ale pomocí exp nikdy nedostaneme
- $O(3)$ je na rozdíl od $SO(3)$ nesouvislá
  - má dvě komponenty souvislosti: podgrupu $SO(3)$ – obsahuje identitu – a druhou komp., která netvoří podgrupu ($\det R = -1$)
  - exp. pokrývá pouze souvislou podgrupu

Lieova algebra

- množina antisym. matic není uzavřená vůči mat. násobení, ale je uzavřená vůči komutátoru:

$$(AB)^T = B^T A^T \Rightarrow ([A,B])^T = (AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T =$$
$$= BA - AB = -[A,B] \quad \text{pro } A^T = -A,\ B^T = -B$$

$\rightarrow [A,B]$ je také antisym. matice

- $A = \varphi_i J_i \,,\ B = \vartheta_j J_j \rightarrow$

$$[A,B] = \varphi_i \vartheta_j [J_i, J_j]$$ $\Rightarrow$ stačí znát komutátory generátorů $\Rightarrow$ strukturní konstanty

- **Lieova algebra $\mathcal{L}$**: - reálný vektorový prostor, na kterém je navíc def. bilin. operace („komutátor") $[a,b]$:
  1. $a, b \in \mathcal{L} \Rightarrow [a,b] \in \mathcal{L}$ (uzavřenost)
  2. $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha [a,c] + \beta [b,c]$ (lin.) (⇔ bilin.)
  3. $[b,a] = -[a,b]$ (antisym.)
  4. $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ (Jacobi)

  $\forall a, b, c \in \mathcal{L}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Př:
- vekt. prostor antisym. matic
- vekt. prostor $\forall$ matic $n \times n$
- prostor funkcí na fáz. prostoru s Poissonovou závorkou

- Lieova algebra grupy $SO(3)$ ... $so(3)$ - grupa antisym. matic 3×3

- **strukturní konstanty** $[J_i, J_j] \in so(3) \Rightarrow [J_i, J_j] = c_{ij}^k J_k$
  - $c_{ji}^k = -c_{ij}^k$; $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$; $c_{pq}^s c_{rs}^t + c_{qr}^s c_{ps}^t + c_{rp}^s c_{qs}^t = 0$
  - explicitně: $\boxed{c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}}$ $\boxed{J_k \to i J_k \Rightarrow c_{ij}^k = i \varepsilon_{ijk}}$ • stále $\mathbb{R}$e LA, přestože $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$
  - jsou závislé na bázi, pro ni potom plně definují $[\cdot,\cdot]$ a celou algebru

- $[\cdot,\cdot]$ zachycuje strukturu Lieovy grupy v okolí jednotky:

$$R_1 = e^{A_1} \sim \mathbb{1} + A_1$$
$$R_2 = e^{A_2} \sim \mathbb{1} + A_2$$
$\Rightarrow R_1 R_2 R_1^{-1} R_2^{-1} =$ / Baker - Campbell - Hausdorff
$$e^X \circ e^Y = e^{X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \dots}$$

$\Rightarrow R_1 R_2 R_1^{-1} R_2^{-1} \approx e^{A_1 + A_2 + \frac{1}{2}[A_1, A_2]} e^{-A_1} e^{-A_2} \approx e^{A_2 + [A_1, A_2]} e^{-A_2}$

$\approx e^{[A_1, A_2]} \approx 1 + [A_1, A_2] + O(A_i^2)$

$\Rightarrow$ v okolí E se nekomutativnost grupy přenáší do algebry jako komutátor

$\Rightarrow$ místo grupy je možné studovat příslušnou algebru (konstruovat její IR etc.), což je výrazně jednodušší struktura – není zcela ekvivalentní, viz $O(3)$ a $SO(3)$, přestože $O(3)$ není izomorfní $SO(3)$

- Poznámka: adjungovaná reprezentace $so(3)$
- zřejmě platí $(J_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk} = -c_{ij}^{k} = \varepsilon_{ikj} = c_{ik}^{j}$
- lze ukázat, že pro lib. abstraktní algebru lze zkonstruovat její reprezentaci jako $(T_a)_{bc} = c_{ac}^{b}$, jsou-li c_{ab}^{c} strukturní konstanty:
- $[J_a, [J_b, J_c]] = c_{bc}^{k} [J_a, J_k] = c_{bc}^{k} c_{ak}^{g} T_g$

$\Rightarrow$ Jacobi v řeči strukt. konstant:

$$c_{bc}^{k} c_{ak}^{g} + c_{ca}^{k} c_{bk}^{g} + c_{ab}^{k} c_{ck}^{g} = 0$$

$$\Big\downarrow (T_a)_{bc} = c_{ac}^{b}$$

$$(T_b)_{kc} (T_a)_{gk} - (T_a)_{kc} (T_b)_{gk} - c_{ab}^{k} (T_k)_{gc} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_{ab}^{k} (T_k)_{gc} = [T_a, T_b]_{gc} \quad ✓$$

$\Rightarrow (T_a)_{bc} = c_{ac}^{b}$ skutečně reprezentuje LA se strukt. konstantami c_{ab}^{c} [lze také $(T_a)_{bc} = -c_{ab}^{c}$]

Základní pojmy z diferenciální geometrie

Def: Topologický prostor (X,τ) je množina X s kolekcí τ podmnožin X, pro kterou platí:

1, $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$

2, $\bigcup_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$ $\quad \forall \tau_\alpha \in \tau$ a A lib. sada indexů („spočetné sjednocení")

3, $\bigcap_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$ $\quad \forall \tau_i \in \tau$ a $n < +\infty$ („konečný průnik")

- τ je topologie na X – otevřené podmnožiny na X
- uzavřená množina: $A = X \setminus \tau_i$ ... doplněk nějaké otevřené množiny

$\Rightarrow X, \emptyset$ jsou otevřené i uzavřené

- vnitřek $A \subset X$: největší otevřená podmnožina A
- uzávěr A: nejmenší uzavřená $\bar{A} \subset X$: $A \subset \bar{A}$

Def: Okolí bodu $x \in (X,\tau)$ je podmnožina $U(x) \subset X$, jejíž nějaká otevřená podmnožina obsahuje x.

$U(x)$ je okolí $x \Leftarrow \exists \sigma \in \tau: x \in \sigma \ \& \ \sigma \subset U(x)$

Def: Zobrazení $\phi: (X_1,\tau_1) \to (X_2,\tau_2)$ je

a, spojité, pokud vzor každé otevřené množiny v X_2 je otevřená množina v X_1:

$$\forall \sigma \in \tau_2 \quad \phi^{-1}(\sigma) \in \tau_1$$

b, spojité v bodě $x \in (X_1,\tau_1)$, pokud

$$\forall U_2(\phi(x)) \subset X_2 \quad \exists U_1(x) \in X_1 : \phi(U_1(x)) \subseteq U_2(\phi(x))$$

- $\phi^{-1}(A) = \{x \in X_1 : \phi(x) \in A\}$ je def. i pro neinvertovatelná zobrazení [množina vzorů bodů podmnožiny $A \in (X_2,\tau_2)$]
- spojitost $\Leftrightarrow$ spojitost v každém bodě

Def: <u>Homeomorfismus</u> je zobrazení $\phi: (X_1,\tau_1) \to (X_2,\tau_2)$, splňující

1, ϕ je bijekce (prosté a na)
2, ϕ a ϕ^{-1} jsou spojitá zobrazení

- $\exists \phi$ homeomorfismus $\Longrightarrow$ (X_1,τ_1) a (X_2,τ_2) <u>homeomorfní</u>
  $\Rightarrow$ def. třídy ekvivalence topol. prostorů

Def: Top. prostor (X,τ) je <u>Hausdorffův</u> (T_2), pokud

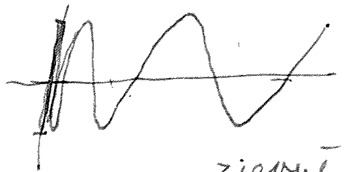
$$\forall x,y \in X \quad \exists O_1, O_2 \in \tau : x \in O_1,\ y \in O_2 \ \&\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

$\Rightarrow$ <u>separabilita</u> prostoru – kolem lib. dvou bodů najdu disjunktní okolí

Def: Top. prostor je <u>souvislý</u>, pokud nelze zapsat jako sjednocení dvou disjunktních otevřených množin.

Def: Top. prostor je <u>obloukově souvislý</u>, pokud každé dva body lze spojit spojitou křivkou:
$\forall x,y \in X \quad \exists \gamma : \langle 0,1 \rangle \to (X,\tau)$ spojité takové, že
$\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$

- obloukově souvislost $\Rightarrow$ souvislost, ale ne naopak:
  - topologist's sine curve:



$$= \{(x>0,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \tfrac{1}{x}\} \cup [\{0\} \times \langle -1, 1 \rangle]$$

– zjevně souvislý, ale křivku z $(x, \sin\frac{1}{x})$ pro nějaké konečné x do $(0,1)$ nelze parametrizovat parametrem t z $\langle 0,1 \rangle$ ... je to "∞-daleko"

Def: Top. prostor je <u>jednoduše souvislý</u>, pokud je obloukově souvislý a každou křivku mezi dvěma body lze převést na lib. jiný oblouk mezi těmito body
$\Leftrightarrow$ každý uzavřený oblouk $\gamma : S^1 \to X$ lze stáhnout do bodu: $\exists \phi$ spojité $D^2 \to X : \phi|_{S^1} = \gamma$ (D^2 je jednotkový disk v $\mathbb{R}^2$)

- jednoduše souvislý prostor „nemá díry" ⊛
- X je <u>lokálně souvislý</u>, pokud každý bod má souvislé otevřené okolí
- <u>komponenta souvislosti</u> – každá maximální souvislá podmnožina prostoru (X,τ)

<u>Def:</u> <u>Báze top. prostoru</u> (X,τ) je kolekce $\mathcal{B}$ otevřených množin taková, že každá otevřená množina v X může být zapsána jako sjednocení množin z $\mathcal{B}$:

$$\forall \tau_i \in \tau \quad \exists B_\alpha \in \mathcal{B} : \tau_i = \bigcup_\alpha B_\alpha$$

<u>Př:</u> · $\mathbb{R}$ má spočetnou bázi otevřených intervalů s délkami a středy danými racionálními čísly

$$\mathcal{B} = \{ U_r(x) : r, x \in \mathbb{Q} \}$$

<u>Def:</u> $M \subset (X,\tau)$ je <u>kompaktní</u>, pokud z každého jejího pokrytí otevřenými množinami $M \subset \bigcup_\alpha \tau_\alpha$, $\tau_\alpha \in \tau$ lze vybrat <u>konečné podpokrytí</u> (obsahující konečný počet množin).

<u>Věta (Heine-Borel)</u>

Podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, pokud je omezená a <u>uzavřená</u>.

- uzavřenost ⇐ celé $\mathbb{R}$ lze namapovat na otevřený interval

<u>Věta:</u> Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní.

- je-li $M = X$, potom se jedná o kompaktní prostor
- <u>loc. kompaktní</u> prostor – každý bod má kompaktní okolí

⊛ <u>homotopie</u> – spojité deformace topologických prostorů na sebe
  - torus je homotopický s hrnkem s uchem, ale ne se sférou – „počet děr" je topologický invariant

Diferencovatelné variety

Def: Topologická varieta M dimenze m je top. prostor, který:

1, je Hausdorffův (separabilní)
2, má spočetnou bázi
3, je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^m$:
$\forall x \in M \quad \exists U(x) \sim A \in \mathbb{R}^m$ otevřenou ve std. topologii

- std. topologie – indukovaná metrikou $d(x,y)$:
$B_\epsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^m;\ d(x,y) < \epsilon \}$ jsou otevřené množiny

Tvrzení: 1, Dimenze variety je jednoznačná.
2, Každá topol. varieta je loc. kompaktní.

Def: Souřadnicová mapa na top. varietě M je dvojice (U, ϕ), kde $U \subset M$ je otevřená množina (doména) a $\phi: U \to \mathbb{R}^m$ je homeomorfismus U na otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^m$ se std. metrickou topologií.

- pokud $U = M$, jedná se o glob. mapu

Def: Atlas na M je kolekce map (U_i, ϕ_i) taková, že

1, $M = \bigcup_i U_i$

2, $\phi_j \circ \phi_i^{-1} \in C^k: \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j) \quad \forall i,j$

- mohu mluvit o C^k, neboť je to zobrazení $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- kompletní atlas tvoří diferenciální strukturu třídy C^k na M

Def: Diferencovatelná varieta M třídy C^k dimenze m je top. varieta M dim. m s dif. strukturou třídy C^k.

- hladká varieta ... C^∞
- analytická varieta ... C^ω (anal. fce s absolutně konvergentním Taylor. rozvojem na otevř. okolí: $\sum |a_n| K \Rightarrow \sum a_n A K$)

(až později)

Def: <u>Pokrývací prostor</u> topol. prostoru (X, τ) je topol. prostor (C, ς) spolu se spojitým surjektivním (na) zobrazením $p: C \to X$ takovým, že

$\forall x \in X \; \exists \, \mathcal{U}(x) \in \tau$, pro které je $p^{-1}(\mathcal{U}(x))$ sjednocením disjunktních otevřených podmnožin C

$(\forall x \in X \; \exists \, \mathcal{U}(x) \in \tau : \; p^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \bigcup_\alpha V_\alpha, \; V_\alpha \in \varsigma \; \& \; V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset.)$

a každá z těchto podmnožin je homeomorfní k $\mathcal{U}(x)$ zobrazením p.

Lieovy grupy

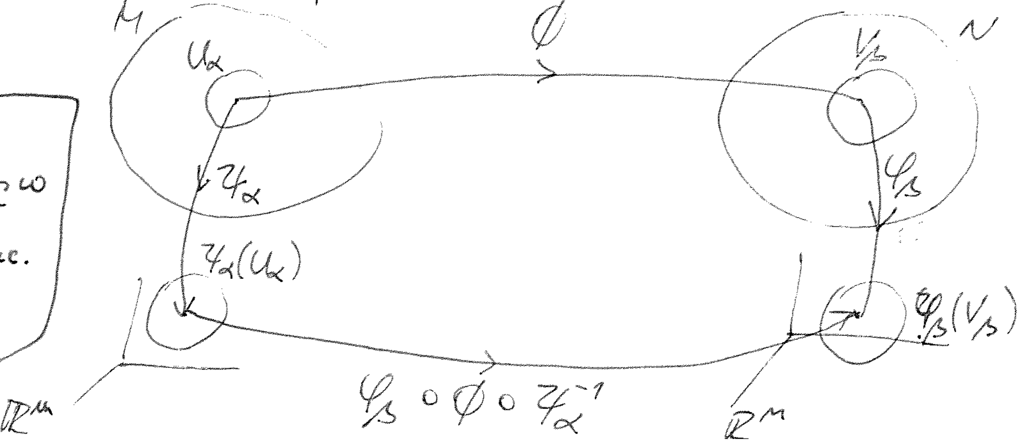
Def: Topologická grupa G je topologický prostor, který je zároveň grupou v algebraickém smyslu a kde

$$\mu : G \times G \to G \qquad (a, b) \mapsto ab \quad \text{(grup. operace)}$$
$$i : \quad G \to G \qquad a \mapsto a^{-1}$$

jsou spojitá zobrazení.

Def: Reálná Lieova grupa G je topologická grupa, která je zároveň hladkou (C^∞) varietou a zobrazení μ a i jsou hladká (C^∞). (*)

Def: <u>Zobrazení</u> $\Phi : M \to N$ mezi hladkými varietami je <u>hladké</u>, pokud je spojité a zobrazení $\varphi_\beta \circ \Phi \circ \psi_\alpha^{-1}$ je C^∞ zobrazení $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pro $\forall$ mapy $(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)$ na M a (V_β, φ_β) na N:



(*) každá C^∞ Lieova grupa je již nutně C^ω (ve smyslu $\exists \, C^\omega$ diferenc. struktura)
Montgomery, Zippin, 1955

• maticová grupa – grupa invertovatelných matic nad polem K s operací mat. násobení
(okruh: množina s operacemi "+" a "•", $\exists$ inverzní prvek vůči "+"
těleso: okruh s inv. operací vůči "•"
pole: komut. těleso)

• lineární L. grupa – grupa izomorfní k nějaké maticové grupě ($\Leftrightarrow$ mající věrnou reprezentaci konečné dimenze) s prvky parametrizovatelnými n parametry a skládáním popsaným hladkými fcemi těchto parametrů (Cornwell, str. 45)

GLOBÁLNÍ VLASTNOSTI LIEOVÝCH GRUP

Příklad: Euklidovská grupa $E(2)$ – transf. Eukl. roviny zach. vzdál. a orientaci OS

$$\hat{x}_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + a_1$$
$$\hat{x}_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + a_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{x} = R(\alpha)x + a$$

• 3-param. Lieova grupa (α, a_1, a_2)

• skládání $\mu : G \times G \to G$ $\qquad (\alpha, a_1, a_2; \beta, b_1, b_2) \mapsto (\gamma, c_1, c_2)$

$$\gamma = \alpha + \beta \qquad \Updownarrow$$
$$c = R(\beta)a + b \qquad \hat{x} = R(\beta)[R(\alpha)x + a] + b$$

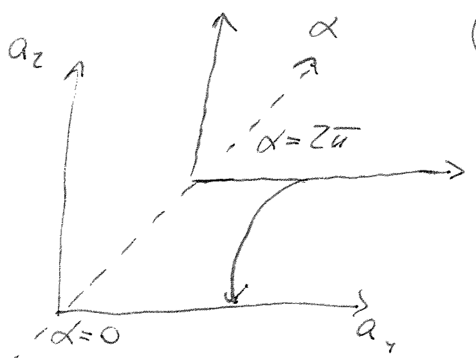
• inverze $i : G \to G$

$$x = R^{-1}(\alpha)\hat{x} - R^{-1}(\alpha)a \qquad \Leftrightarrow$$

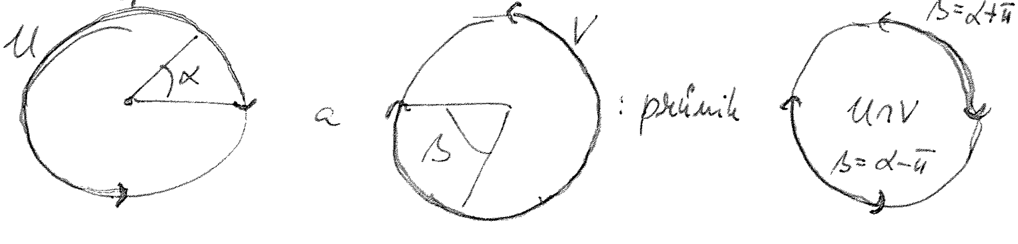
$$(\alpha, a_1, a_2) \to (-\alpha, -a_1\cos\alpha - a_2 \sin\alpha, a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha)$$

$\Rightarrow \mu, i$ jsou C^∞ funkce

• $E(2) \sim ISO(2)$ – abstraktní Lieova grupa
$\cong$ 3-dim hladká varieta – 3-dim válec v $\mathbb{R}^4$
(rovinu $\alpha=0$ identifikuji s rovinou $\alpha=2\pi$ $\Rightarrow$ $\nexists$ globální mapa, ve 2π by nebyla hladká)



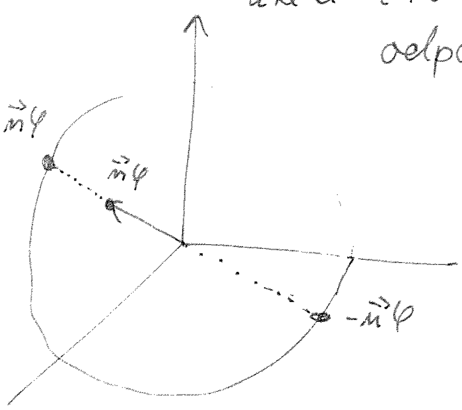
• pokryto dvěma hladkými mapami, C^∞
mapy:



Př.: • SO(2) ... varieta je S^1 - kružnice o poloměru 1

- kompaktní, 1-dim
- nekonečně-násobně souvislá - dva body mohu spojit křivkou, která n-krát oběhne kružnici a přitom čísla n rozděluje trajektorie na třídy; je jich nekonečně mnoho
- izomorfní maticové grupě $e^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$

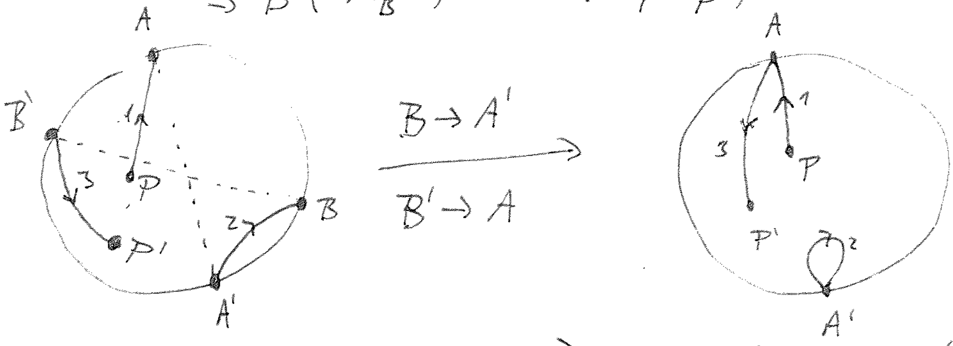
• SO(3) ... 3-rozměrná sféra o poloměru π, na které ztotožníme protilehlé body; každý bod odpovídá rotaci o φ kolem $\vec{n}$



- kompaktní
- dvojnásobně souvislá: (Ma, str. 116)

1, uvažujme křivku $P \to P'$:

$$P(\vec{n}_P \varphi_P) \to A(\vec{n}_A \pi) \to A'(\vec{n}_A(-\pi)) \to B(\vec{n}_B \pi) \to B'(-\vec{n}_B \pi) \to P'(\vec{n}_{P'} \varphi_{P'})$$



dva skoky $\longrightarrow$ $A \to A' \to A \equiv$ žádný skok, (2) mohu stáhnout do bodu

$\Rightarrow$ pro $P' = P$ umím křivku se sudým počtem skoků stáhnout do bodu

2, pro křivku s jedním (obecně lichým počtem) skokem to neumím

$\Rightarrow$ SO(3) není jednoduše souvislá, ale mám jen dvě třídy trajektorií $\Rightarrow$ dvojnásobná souvislost

- izomorfní grupě ortog. $\mathbb{R}$ matic 3×3 s $\det = 1$ (viz úvod)

• <u>SU(2)</u> – unitární matice 2×2 s det $u = 1$

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1 \qquad a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow 3 \text{ nez. parametry}$$

$$\Rightarrow u = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - i\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}) \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ ... libovolný jednotkový vektor $\Rightarrow (n_1, n_2, n_3) \Leftrightarrow (\vartheta, \varphi)$

$\Rightarrow$ 3-rozměrná varieta $(\omega, \vartheta, \varphi) \Leftrightarrow (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

<u>koule o poloměru 2π</u>, jejíž celý povrch $\omega = 2\pi$ odpovídá jedinému prvku $u(2\pi, \vartheta, \varphi) = -\mathbb{1}$

$\Rightarrow$ <u>kompaktní</u>, <u>jednoduše souvislá</u> L. grupa

• protože celý povrch koule odpovídá jedinému prvku, skoky v SO(3) jsou zde nahrazeny spojitou trajektorií po povrchu a tedy libovolnou uzavřenou křivku můžeme stáhnout do bodu

• $\exists\, \phi: SU(2) \to SO(3)$ surjekce (homomorfismus, $\mathrm{Im}\,\phi = SO(3)$)

$\Rightarrow$ SU(2) je <u>univerzální pokrývací grupa</u> SO(3)

(ϕ má diskrétní (spočetné) jádro, SU(2) je jednoduše souvislá)

– univ. pokrývací grupa je jediná, $\exists$ pro obloukově souvislé grupy (+ další podmínky)

<u>NB:</u> $\overline{SL(2,\mathbb{R})}$ není lineární!

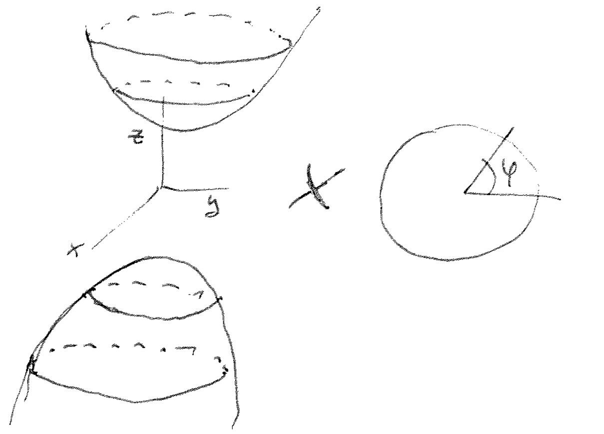
• <u>SL(2,ℝ)</u>

– regulární ℝ matice 2×2, det $M = 1$

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & \frac{1 + x_2 x_3}{x_1} \end{pmatrix} \qquad x_1 \neq 0$$

lépe:

$$M = SO = \begin{pmatrix} z + y & x \\ x & z - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$H^2 \times S^1$

$S = (MM^T)^{1/2}$ ... sym, det=1 $(z^2 - x^2 - y^2 = 1)$

$O = S^{-1} M$ ... orthog., det = 1

• nekompaktní, nesouvislá