LIEOVY ALGEBRY jako levoinvariantní vektorová pole na Lieových grupách

Def: Křivka $\gamma(t)$ na varietě M je hladké (C^∞) zobrazení

$\gamma : \Omega \to M$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Def: Křivky γ_1 a γ_2 jsou tečné v $p \in M$, pokud

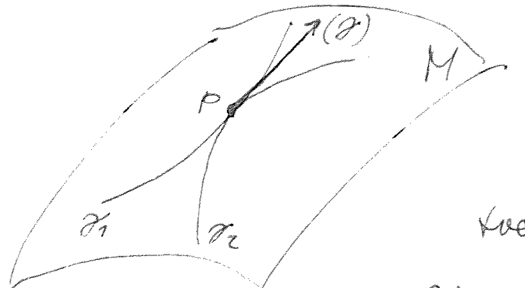
a) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$

b) v nějakých souřadnicích na $U(p)$ platí

$$\left.\frac{dx^\mu(\gamma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx^\mu(\gamma_2(t))}{dt}\right|_{t=0} \quad \forall \mu = 1, \dots, m$$

- x^μ je projekce $M \to \mathbb{R}$: $g \mapsto x^\mu$, kde x^μ je μ-tá souřadnice bodu g v loc. mapě $(U(p), \phi)$:
  $g \leftrightarrow (x^1, \dots, x^m)$; $\gamma(t) \leftrightarrow (x^1(t), \dots, x^m(t))$
- v mapě ϕ předpokládám $\phi(p) = (0, 0, \dots, 0)$

Def: Tečný vektor (γ) k varietě M v bodě $p \in M$ je třída ekvivalence křivek, které jsou vzájemně tečné v bodě p



- (γ) má směr daný směrem $\dot\gamma(t)$ a velikost danou $|\dot\gamma(t)|$
- množina $\forall$ tečných vektorů v p tvoří lineární vektorový prostor s operacemi

i) $\gamma_1 + \gamma_2 = \phi^{-1} \circ [\phi \circ \gamma_1 + \phi \circ \gamma_2]$

ii) $\alpha\gamma = \phi^{-1} \circ [\alpha \phi \circ \gamma]$

(ϕ je loc. mapa na $U(p)$ splň. $\phi(p) = (0, \dots, 0)$)

$\phi(p) = (0, \dots, 0)$ $\Rightarrow$ $\gamma_1 + \gamma_2$ i $\alpha\gamma$ procházejí bodem p

Def: Tečný prostor T_pM k varietě M v bodě p je vekt. prostor tečných vektorů v bodě p.

Def: Nechť f je hladká funkce na varietě $M \to \mathbb{R}$ a $v = (\gamma) \in T_pM$ je vektor v bodě $p \in M$. Derivace ve směru v je lin. funkcionál $v : F(M) \to \mathbb{R}$

$$v(f) \equiv \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \left.\frac{f(\gamma(t+\Delta t)) - f(\gamma(t))}{\Delta t}\right|_{t=0}.$$

($F(M)$ je prostor C^∞ fcí na M)

- je-li $(U(p), \phi)$ loc. mapa a $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$, potom

$$v(f) \equiv \frac{df}{dt} \equiv \frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^m(t))\Big|_{t=0} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f)$$

- označili jsme $v^i = \frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}$ a můžeme formálně def. operátor

$$\boxed{v \equiv v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \equiv \frac{d}{dt}$$

složky vektoru $v \equiv (\gamma)$

- operátory $\frac{d}{dt}$ tvoří lineární vektorový <u>prostor D_pM</u> derivací v bodě $p \in M$
- <u>$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ je souřadnicová báze D_pM</u>
- zjevně $\dim D_pM = \dim M$
- z konstrukce je zjevné, že platí

<u>Věta:</u> Zobrazení $T_pM \to D_pM$

$$(\gamma) \mapsto v(f) = \frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} \text{ je izomorfismus.}$$

$\Rightarrow \dim T_pM = \dim M \quad (\Leftarrow \dim D_pM = \dim M)$

$\Rightarrow$ můžeme ztotožnit T_pM s prostorem D_pM a pracovat se souřadnicovou bází $\frac{\partial}{\partial x^i}$ jako s bází T_pM

<u>Def:</u> <u>Tečný bandl</u> $TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_pM$

<u>Def:</u> <u>Vektorové pole</u> V na varietě M je <u>hladké</u> přiřazení tečného vektoru $V_p \in T_pM$ v každém bodě $p \in M$:

$\forall f \in C^\infty(M)$ je

$$Vf : M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto (Vf)(p) = V_p(f) \equiv \frac{df(\gamma_p(t))}{dt}\Big|_{t=0}$$

hladké zobrazení pro $V_p = (\gamma_p)$.

- vektorové pole je tedy zobrazení $V: M \to TM$ ⊛
- Vf je hladké $\Leftrightarrow (Vf) \circ \phi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}) \quad \forall f \in C^\infty \; \forall p \in M$

⊛ • samotné pole V je zobrazení (funkcionál) $F(M) \to F(M)$

Def: VFld(M) - reálný vekt. prostor hladkých vekt. polí na M

- $\dim VFld(M) = +\infty$

- souřadnicový zápis:

$$V_p = v^\alpha(p) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

- $v^\alpha(p) = \left.\frac{d x_p^\alpha(t)}{dt}\right|_{t=0}$, kde $x_p^\alpha(t)$ je projekce $\gamma_p(t) = (x_p^1(t), \dots, x_p^m(t))$ křivky (γ_p) na lok. souřadnici x^α (v okolí $p \in M$)

- transformace souřadnic $(U, \phi) \to (U', \phi')$ na $U \cap U'$:

$$V(f) = v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{dx^\alpha}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \underbrace{v'^\nu \frac{\partial f}{\partial y^\nu}} = \frac{dy^\nu}{dt}\frac{\partial f}{\partial y^\nu} = \underline{\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial y^\nu}}$$

$$\Rightarrow v'^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} = v^\alpha \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\nu} = v^\alpha J^\nu_\alpha \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

$$\overset{y \equiv x'}{\Rightarrow} \boxed{v'^\nu = v^\alpha J^\nu_\alpha \quad ; \quad J^\nu_\alpha = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}} \quad \dots \text{Jakobián tce}$$

Def: Integrální křivka vekt. pole $V \in VFld(M)$ procházející bodem $p \in M$ je křivka $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $\gamma(0) = p$, která je pro každé $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tečná k $V_{\gamma(t)}$:

$$\frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt} = v^\mu(\gamma(t)) \qquad \gamma(0) = p$$

- lze zapsat pomocí push-forward zobrazení

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right) = V_{\gamma(t)} : \quad \gamma_*\left(\frac{d}{dt} x^\mu\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(x^\mu \circ \gamma(t)\right) \equiv \frac{d}{dt} x^\mu(\gamma(t))$$

$x^\mu : M \to \mathbb{R}$ je projekce $p(x^1, \dots, x^m) \longmapsto x^\mu$

Def: Vekt. pole je kompletní, pokud integrální křivku procházející bodem $p \in M$ lze prodloužit na $\forall t \in \mathbb{R}$ pro $\forall p \in M$.

(Věta: Pro kompaktní M jsou $\forall V \in VFld(M)$ kompletní)

(• integrální křivky komplexního V vyplňují celou varietu (tvoří $n-1$-rozměrnou kongruenci), nemohou se protínat jen v sing. bodech $V=0$)

Def: <u>Tok ϕ_t^V generovaný</u> vekt. polem V je množina zobrazení $\phi_t^V : M \to M$

$$\phi_t^V : \gamma(t_0) \mapsto \gamma(t_0+t)$$

kde $\gamma(t)$ je integrální křivka k V procházející bodem $\gamma(t_0)$.

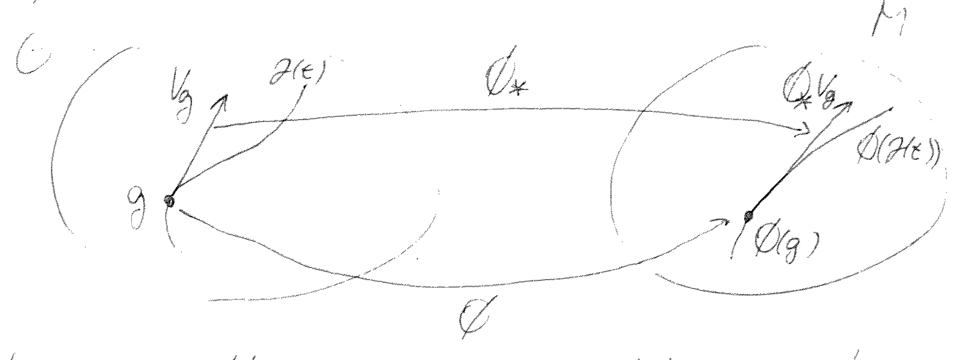
- neboli: celá kongruence integ. křivek k V definuje zobrazení M na sebe (bod $p = \gamma(t_0)$ posuneme podél integrální křivky γ o vzdálenost definovanou změnou parametru $t_0 \to t_0 + t$)
- t je spojitý parametr těchto zobrazení
- platí
  - ϕ_0 je identita
  - $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$
  - $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$

  $\Rightarrow$ tok ϕ_t tvoří na M jednoparametrickou L. grupu

Def: <u>Push-forward vekt. polí</u> (tečné zobrazení) indukovaný zobrazením $\phi : G \to M$ mezi dvěma varietami je zobrazení $\phi_* : T_g G \to T_{\phi(g)} M$

$$\phi_* \left(\frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} \right) = \frac{df(\phi(\gamma(t)))}{dt}\Big|_{t=0}$$

- ϕ_* tedy zobrazuje tečný vektor ke křivce $\gamma(t)$ v bodě $\gamma(0)$ na vektor tečný k obrazu křivky $\phi(\gamma(t))$ v bodě $\phi(\gamma(0))$:



• $V = (\gamma) \in T_g G$

$\Downarrow$

$\phi_* V = (\phi \circ \gamma) \in T_{\phi(g)} M$

(ještě jinak: V je derivace podél γ $\Rightarrow$ $\phi_* V$ je derivace podél $\phi(\gamma)$)

- v souřadnicích explicitně platí:

$$\phi: x^\mu \to y^\nu(x^\mu) \quad \& \quad V = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Rightarrow \phi_* V = w^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

$$\Rightarrow \phi_* V(f) = \frac{df(\phi(\gamma(t)))}{dt} = \frac{df(y^1(t), \dots, y^m(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} = w^\nu \frac{\partial f}{\partial y^\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{w^\nu = v^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}}$$

... je to transformace vektoru při přechodu ze souřadnic $(U(p), x^\mu)$ do souřadnic $(U(\phi(p)), y^\nu)$

Def: Lieova závorka (komutátor) vekt. polí $V, W \in VFld(M)$ je vektorové pole $[V,W] \in VFld(M)$ definované v $p \in M$

$$[V,W]_p : F(M) \to \mathbb{R} \qquad [V,W]_p(f) \equiv V_p(Wf) - W_p(Vf)$$

- lze ukázat, že $[V,W]_p \in T_pM$
- samotný „součin" dvou polí $VW(f) \equiv V_p(Wf)$ není vektor – je to dif. operátor 2. řádu
- $[\cdot,\cdot]$ je def. pouze pro vekt. pole, ne pro vektory, neboť obsahuje derivaci pole:

$$[V,W] = \left(V^\nu W^\mu_{\ ,\nu} - W^\nu V^\mu_{\ ,\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

(*) Lieova derivace vekt. pole: $\frac{1}{t}$(vekt. v bodě – vekt. přenesený z bodu vzdál. o t

- antisymetrie: $[W,V] = -[V,W]$
- Jacobiho identita: $[V,[W,Z]] + [W,[Z,V]] + [Z,[V,W]] = 0$
- $VFld(G)$ s op. $[\cdot,\cdot]$ ovšem není Lieova algebra G:

$$\dim VFld(G) = +\infty \,!$$

Def: Pravé a levé posunutí Lieovy grupy G jsou zobrazení

$$R_h : G \to G \qquad g \mapsto gh$$
$$L_h : G \to G \qquad g \mapsto hg$$

- jsou to difeomorfismy – hladké izomorfismy mezi dif. varietami – R_h, L_h jsou hladká z definice Lieovy grupy

(*) platí $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$, kde $\mathcal{L}_X$ je Lieova derivace podél X

$$\mathcal{L}_X Y|_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\phi_{-t*} Y(\phi_t(p)) - Y(p)\right)$$

ϕ_t ... tok generovaný podél X

Def: Vektorové pole $V \in VFld(G)$ na Lieově grupě G je levoinvariantní, pokud platí

$$(L_g)_* V = V \quad \forall g \in G \iff (L_g)_* V_{g'} = V_{gg'}$$

- terminologie: V je "L_g-related" samo se sebou
- souřadnicově:

$$v^\nu(y) \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \underbrace{v^\mu(x)\, J^\nu_\mu(x) \frac{\partial}{\partial y^\nu}}$$ (srov. 17 nahoře)

↑pole v y ↑pole posunuté z x do y ; $J^\nu_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}$

- $\mathcal{L}(G)$ ... množina levoinv. polí
- levoinvariantní pole je tedy plně určeno odpovídajícím vektorem v $T_e G$ (tečný prostor v jednotce) nebo v lib. jiném bodě, na zbytek variety mohou být odsud roznesena levým posunutím:

$$V_g = (L_g)_* V_e$$

- NB: takové pole je určitě hladké – L_g je hladké zobrazení

Věta: Množina $\mathcal{L}(G)$ levoinvariantních vekt. polí na G tvoří n-rozměrný reálný vekt. prostor izomorfní $T_e G$.

$$\Rightarrow n = \dim \mathcal{L}(G) = \dim T_e G = \dim G$$

Dk: Isham, str. 159 – plyne z $V_g = (L_g)_* V_e$, stačí ukázat, že je to izomorfismus

Věta: Pro $\phi : G \to G'$ difeomorfismus mezi varietami platí

$$\phi_* [V, W] = [\phi_* V, \phi_* W]$$ (D.cv.)

$$\Rightarrow (L_g)_* [V, W] = [(L_g)_* V, (L_g)_* W] = /V, W \in \mathcal{L}(G)/ = [V, W]$$

$\Rightarrow$ Lieova závorka levoinv. polí je levoinvariantní pole

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ tvoří Lieovu algebru s komutátorem

$$[V, W](f) = V(Wf) - W(Vf)$$

- $\mathcal{L}(G)$ je izomorfní T_eG a navíc mohu definovat komutátor dvou vektorů $V_e, W_e \in T_eG$ pomocí

$$[V_e, W_e] = [V, W]_e \quad \text{pro } V, W \in \mathcal{L}(G) \text{ levoinvariantní}$$

pole příslušná k (generovaná z) V_e, W_e

$\Rightarrow$ Def: T_eG s komutátorem $[V_e, W_e] = [V, W]_e$ tvoří Lieovu algebru Lieovy grupy G.

Def: Reálná Lieova algebra $\mathcal{L}$ (již bylo - str. 3)
je reálný vekt. prostor dimenze n, na kterém je def. bilineární operace $[\cdot, \cdot]$ splňující $\forall a, b, c \in \mathcal{L}$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i, $[a, b] \in \mathcal{L}$ (uzavřenost)
ii, $[b, a] = -[a, b]$ (anti-sym.)
iii, $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c]$ (lin + ii, $\Rightarrow$ bilin.)
iv, $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]]$ (Jacobi)

- komplexní LA: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Def: strukturní konstanty (bylo - str 3)
Nechť e_i $(i = 1, \dots, n)$ tvoří bázi v $\mathcal{L}$. Potom nutně platí (uzavřenost)

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k$$

a konstanty C_{ij}^k se nazývají strukturní konstanty $\mathcal{L}$

- transformují se jako tenzor 3. řádu
- plně definují abstraktní Lieovu algebru

Věta: (Adoův teorém)
Každá abstraktní LA je izomorfní nějaké LA matic se std. komutátorem.

Věta: (Freudenthal, de Vries, Linear L. Groups, 1969 - Dk)
Každá reálná Lieova algebra je izomorfní reálné L. algebře určité lineární Lieovy grupy.
($\Leftrightarrow$ ke každé LA $\exists$ LG).

(nelin. L. grupy: otoč)

Maticové grupy a jejich algebry

$GL(n,\mathbb{R})$ – grupa invertovatelných matic $n\times n$ ($\det \neq 0$) s $\mathbb{R}$ koeficienty
– $\dim GL(n,\mathbb{R}) = n^2$
– abstraktní grupa $GL(V)$ ... grupa automorfismů na V – není maticová, ale je lineární (má věrnou repre $GL(n,\mathbb{R}/\mathbb{C})$, kde n je dim. V)
– neabelovská (vyjma $G(1,\mathbb{R}) \sim (\mathbb{R},\cdot)$)
– nesouvislá varieta – matice s kladným a záporným det. tvoří dvě komponenty, $\det A > 0$ tvoří souvislou podgrupu $GL^+(n,\mathbb{R})$
– nekompaktní (max. kompaktní podgrupa je $O(n)$)
– $GL^+(n,\mathbb{R})$ dvojnás. souvislá pro $n>2$ (fundamentální grupa je $\mathbb{Z}_2$, pro $n=2$ $\mathbb{Z}$)

- globální parametrizace: n^2 mat. elementů $a^i_j = A^i_j$
- souřadnicová reprezentace levého posunutí:

$$(L_A X)^i_j = a^i_k x^k_j$$

- levoinvariantní pole na $GL(n,\mathbb{R})$:
  - báze T_eG je $\partial^j_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i_j}$ ... n^2 derivací podél souř. os
  - obecný vektor z T_eG odp. matici C: $V_C = C^i_j \partial^j_i = Tr(C\partial)$ (není to nic jiného než lin. kombinace vekt. báze)

$$\Rightarrow V_C(X) = C(X)^i_j \partial^j_i \text{ je příslušné levoin. pole}$$

  - $C(X)$ najdu roznesením V_C z identity:
    a, najdu vztah pro push-forward generovaný levým posunutím L_Y z X_0 do $X = YX_0$
    b, položím $X_0 = E$, $Y = X$ a $V_C(X_0 \to E) = V_C$

a) $(L_Y X_0)^i_j = y^i_k x_0{}^k_j = x^i_j$ & $(L_Y)_* C(X_0)^i_j \partial_0{}^j_i = C(X_0)^k_\ell \dfrac{\partial x^i_j}{\partial x_0{}^k_\ell} \partial^j_i = C(X)^i_j \partial^j_i$

$$\frac{\partial x^i_j}{\partial x_0{}^k_\ell} = \Big/ x^i_j = y^i_k x_0{}^k_j = \delta^\ell_j y^i_k x_0{}^k_\ell \Big/ = \delta^\ell_j y^i_k$$

$$\Rightarrow C(X)^i_j = C(X_0)^k_\ell \delta^\ell_j y^i_k = C(X_0)^k_j y^i_k$$

b) $X_0 = E \Rightarrow C(X_0)^k_j = C^k_j$, $Y = X \Rightarrow C(X)^i_j = x^i_k C^k_j$

$$\Rightarrow \boxed{V_C(X) = x^i_k C^k_j \partial^j_i \in \mathcal{L}(GL(n,\mathbb{R}))} \qquad \partial^j_i = \frac{\partial}{\partial x^i_j}$$

- lze psát $V_C(X) = Tr(XC\partial) \in \mathcal{L}(GL(n,\mathbb{R}))$

- Weylova báze

$$(E^\ell_k)^i_j = \delta^i_k \delta^\ell_j$$

$\Rightarrow$ báze $\mathcal{L}(G)$: $e^\ell_k(X) \equiv V_{E^\ell_k}(X) = x^i_m (E^\ell_k)^m_j \partial^j_i = x^i_m \delta^m_k \delta^\ell_j \partial^j_i$

$$\Rightarrow \boxed{e^\ell_k(X) = x^i_k \partial^\ell_i}$$

$$\Rightarrow V_C(X) = C^k_\ell e^\ell_k(X) = x^i_k C^k_\ell \partial^\ell_i \quad \checkmark$$

- strukturní konstanty $gl(n,\mathbb{R})$ ve Weylově bázi

$[e^i_j, e^\ell_k](f) = x^\mu_j \partial^i_\mu (x^\nu_k \partial^\ell_\nu)(f) - x^\nu_k \partial^\ell_\nu (x^\mu_j \partial^i_\mu)(f) = \Big/$ druhé derivace f vypadnou

$$= x^\mu_j \delta^\nu_\mu \delta^i_k \partial^\ell_\nu(f) - x^\nu_k \delta^\ell_j \delta^\mu_\nu \partial^i_\mu(f)$$

$$= (\delta^i_k x^\nu_j \partial^\ell_\nu - \delta^\ell_j x^\mu_k \partial^i_\mu)(f)$$

$$\Rightarrow \boxed{[e^i_j, e^\ell_k] = \delta^i_k e^\ell_j - \delta^\ell_j e^i_k} \quad (*)$$

- Tečný prostor $T_e(GL(n,\mathbb{R}))$ jako Lieova algebra
  - $V_C(e) = \Big/ x^i_k = \delta^i_k \Big/ = C^k_j \partial^j_k = Tr(C\partial)$
  - bázové vektory: $e^j_i = \partial^j_i$

⇒ komutátor dvou vektorů z $T_e G$ odvozený z Lieovy závorky (*)

$$[V_C, V_D] = [c^i_j e^j_i, d^l_k e^k_l] = c^i_j d^l_k (\delta^j_l e^k_i - \delta^k_i e^j_l)$$

$$= c^i_j d^j_k e^k_i - c^i_j d^l_i e^j_l = (c^i_j d^j_k - d^i_j c^j_k) e^k_i$$

$$= [C,D]^i_k e^k_i = V_{[C,D]}$$

⇒ definujeme-li na T_e std. maticový komutátor, dostáváme L. algebru $\sim gl(n,\mathbb{R})$

⇒ $gl(n,\mathbb{R})$ je algebra $\forall$ matic $n\times n$ se std. komutátorem (invertovatelnost matic z $GL(n,\mathbb{R})$ je zajištěna exp.)

• vidíme explicitně izomorfismus $\mathcal{L}(GL(n,\mathbb{R})) \sim T_e(GL(n,\mathbb{R})) \sim End(\mathbb{R}^n)$

$End(\mathbb{R}^n)$ ... endomorfismy na $\mathbb{R}^n$ ⇔ matice $n\times n$ vč. neinvertovatelných

Tvrzení: Je-li $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ podgrupa, potom g je podalgebra $gl(n,\mathbb{R})$. (Platí i pro $GL(n,\mathbb{C})$)

⇒ při studiu lineárních L. grup a jejich algeber se můžeme omezit na algebry matic

Př: • $so(3)$ jako algebra antisym. matic je podalgebrou $gl(n,\mathbb{R})$

• obecně získáme podmínku na matice z L. algebry nějaké podgrupy $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ tak, že derivujeme křivky $X(t) \subset G$, splňující $X(t=0) = \mathbb{1}$, a dosadíme $t=0$:

$$X(t) = \mathbb{1} + Ct \in G \Rightarrow C \in g$$ (viz úvodní příklad)

Př: algebra $su(2) \sim so(3)$ (NB: i pro $SU(2)$ dostáváme reálnou LA)

$SU(2)$: $U^\dagger U = 1$ & $\det U = 1$ & $U \cong \mathbb{1} + iAt$

⇒ $A^\dagger = A$, $\det U = \exp(\mathrm{Tr} \log U) \simeq \exp(\mathrm{Tr}(iAt)) = 1 \Rightarrow \mathrm{Tr} A = 0$

⇒ báze bezestopých herm. matic 2×2 jsou σ_i: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

⇒ pro $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ dostáváme algebru $c^k_{ij} = \varepsilon_{ijk} \sim so(3)$

Podgrupy $GL(n,\mathbb{K})$

$A \in G$, $a \in g$ $\qquad \eta = \mathrm{diag}(\overbrace{1,1,\dots}^{r}, \overbrace{-1,-1,\dots}^{s})$; $n = r+s$

grupa	$GL(n,\mathbb{R})$	$SL(n,\mathbb{R})$	$O(r,s)$	$SO(r,s)$	$GL(n,\mathbb{C})$	$U(n)$	$SU(n)$
omezení na A	$\det A \neq 0$	$\det A = 1$	$A^T \eta A = \eta$	$\overset{+}{\det} A = 1$	$\det A \neq 0$	$A^+ A = \mathbb{1}$	-//- + $\det A = 1$
algebra	$gl(n,\mathbb{R})$	$sl(n,\mathbb{R})$	$o(r,s)$	$\sim so(r,s)$	$gl(n,\mathbb{C})$	$u(n)$	$su(n)$
omezení na a	—	$\mathrm{Tr}\, a = 0$	$(\eta a)^T = -\eta a$	-//-	—	$a^+ = -a$	-//- + $\mathrm{Tr}\, a = 0$
dimenze	n^2	$n^2 - 1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$2n^2$	n^2	$n^2 - 1$

- dim $u(n)$: imag. diagonála $\Rightarrow n$, Re a Im části mimodiag $\Rightarrow 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

Dodatek: $GL(1,\mathbb{R})$ vs. $(\mathbb{R},+)$

- $GL(1,\mathbb{R})$ jsou $\mathbb{R}$ čísla bez nuly s op. násobení
  - báze $\mathcal{L}(GL(1,\mathbb{R}))$ je $\{x \frac{\partial}{\partial x}\}$ $\Rightarrow$ $V_a = a x \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{L}$
  - $gl(1,\mathbb{R})$ je komutativní algebra $\mathbb{R}$ čísel

- $(\mathbb{R},+)$ ... $\forall$ $\mathbb{R}$ čísla s operací sčítání
  - globální mapa je přímo číslo x
  - levé posunutí $L_a x = x + a$
  - báze T_e : $\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $V_c = c \frac{\partial}{\partial x} \in T_e$
  - $V_c(x) = C(x) \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{L}$:

$$(L_y)_* \, C(x_0) \frac{\partial}{\partial x_0} = C(x_0) \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x} = C(x) \frac{\partial}{\partial x} = C(x_0) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow C(x) = C(e) = c$$

$\Rightarrow V_c(x) = c \frac{\partial}{\partial x}$, báze $\mathcal{L}$ je $\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ dostáváme komut. algebru izomorfní $gl(1,\mathbb{R})$

- $(\mathbb{R},+)$ je ovšem izomorfní jen souvislé komponentě $GL^+(1,\mathbb{R})$ skrze izomorfismus $x \mapsto e^x$
  $(\mathbb{R},+) \to GL(1,\mathbb{R})$