JEDNOPARAMETRICKÉ PODGRUPY A EXP. ZOBRAZENÍ

- LA – linearizace LG v okolí jednotkového prvku
- inverzní operace – rekonstrukce LG z LA pomocí exp
  - ne vždy ovšem pokryje celou grupu ($\Leftarrow$ nesouvislost, nekompakt.)
  - $\exists$ neizomorfní LG mající izomorfní LA

Def: <u>Jednoparametrická podgrupa</u> LG je křivka $\gamma(t)$, pro kterou platí:

i, $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s) \qquad \forall t,s \in \mathbb{R}$

ii, $\gamma(0) = e$

- srov. s <u>tokem vekt. pole</u>
- lib. prvek jednoparam. podgrupy lze zapsat jako $\gamma(t) = \gamma(\epsilon)^n$ pro $\epsilon = \frac{t}{n}$ ... srov. $R(\varphi) = \lim_{N\to\infty}\left(R\left(\frac{\varphi}{N}\right)\right)^N$ pro $SO(3)$

$\Rightarrow$ každý prvek z $\gamma(t)$ lze vyjádřit jako součin prvků z okolí e

Věta: Každá jednoparametrická podgrupa G je integrální křivkou jistého levoinv. vekt. pole na G a naopak, každá integ. křivka $\gamma_V(t)$ pole $V \in \mathcal{L}(G)$, splňující $\gamma(0) = e$, je jednoparametrickou podgrupou G. (Fecko 11.3.3 – p. 226)

Dk: 1) $\gamma(t)$ jednopar. podg. $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{L}(G)$:

$$V_{\gamma(t)}(f) = \frac{d}{ds} f(\gamma(s))\Big|_{s=t} = \frac{d}{ds} f(\gamma(s+t))\Big|_{s=0} = /\gamma(t)\ \text{1-p. podg}/$$

$$= \frac{d}{ds} f(\gamma(t)\gamma(s))\Big|_{s=0} \overset{(*)}{=} \frac{d}{ds} f(L_{\gamma(t)}\gamma(s))\Big|_{s=0} = [(L_{\gamma(t)})_* V_e](f)$$

$$\Rightarrow V_{\gamma(t)} = (L_{\gamma(t)})_* V_e \quad \Rightarrow \quad V \in \mathcal{L}(G)$$

2) $V \in \mathcal{L}(G) \Rightarrow$ pro tečnou křivku platí $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$:

- $\Gamma(t) = \gamma(t+s)$ je tečná křivka k témuž poli, startující v $\gamma(s)$ místo v e:

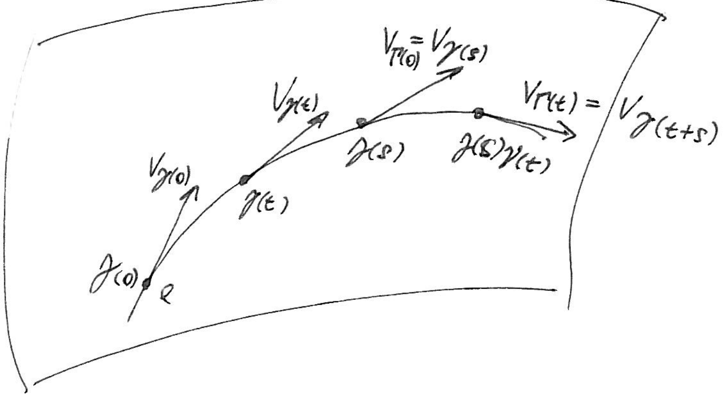
$$V_{\Gamma(t)}(f) = \frac{d}{dt'} f(\gamma(t'+s))\Big|_{t'=t} = \frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau))\Big|_{\tau=t+s} = V_{\gamma(t+s)}(f)$$

- přitom ale $(L_{\gamma(s)})_* V = V \Rightarrow \gamma(t+s)$ je zároveň tečnou křivkou k $(L_{\gamma(s)})_* V$, jehož tečná křivka je (viz (*)) $\gamma(s)\gamma(t) = \gamma(t+s)$ $\boxtimes$

spec. platí

$$(L_{\gamma(s)})_* V_{\gamma(t)} \equiv V_{\gamma(s)\gamma(t)} \overset{\text{předchozí řádek}}{=} V_{\gamma(s+t)}$$

$\Rightarrow \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t) \Rightarrow \gamma$ je jednoparam. podgrupa $\boxtimes$



$\Downarrow$ důsledek

<u>Věta:</u> Je-li V <u>levoinvariantní pole</u> na G, potom V je <u>kompletní</u>.

<u>Dk:</u> $\gamma(t)$ je def. pro $\forall t \in \mathbb{R}$, neboť $\gamma(t)\gamma(s)$ má v grupě vždy smysl

<u>Př:</u> <u>jednoparametrické podgrupy</u> na $GL(n,\mathbb{R})$

- $V_C = x^i_k C^k_j \partial^j_i \Leftrightarrow (V_C)^i_j = x^i_k C^k_j$ je levoinv. pole pro C lib. matici $n \times n$

$\Rightarrow$ int. křivka $\gamma(t) = (x^1_1(t), x^1_2(t), \dots, x^n_n(t))$ splňuje dif. rci

$$\left(V^{\mu}_{\gamma(t)} \equiv \frac{dx^{\mu}(t)}{dt} \right) \qquad \boxed{\frac{dx^i_j(t)}{dt} = x^i_k(t) C^k_j \quad \& \quad x^i_j(0) = \delta^i_j}$$

maticově $\Leftrightarrow \frac{d}{dt} X(t) = X(t) C \;\;\&\;\; X(0) = \mathbb{1} \Rightarrow X(t) = X(0)\exp(tC) = \exp(tC)$

$\left(\text{z def exp: } \exp(tC) = \mathbb{1} + tC + \frac{1}{2!} t^2 C \cdot C + \dots \Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(tC)) = C\exp(tC) = e^{tC} C \right)$

$\Rightarrow$ <u>pro $GL(n,\mathbb{R})$</u> jsou jednoparam. podgrupy dány <u>exponenciálou</u> <u>matice C</u> odpovídající levoinv. poli V_C

- víme, že existuje vzáj. jednoznačné přiřazení

tečný vektor z $T_e G \Leftrightarrow$ pole z $\mathcal{L}(G) \Leftrightarrow$ jednoparam. podgr. v G

$\Rightarrow$ definujeme exponenciální zobrazení obecně jako zobrazení z LA do LG:

27

Def: Nechť $\gamma^V(t)$ je jednoparam. podgrupa v G odpovídající $V \in \mathcal{L}(G)$ generovanému vektorem V_e z LA $\mathfrak{g}$. Potom <u>exponenciální zobrazení</u> $\exp: \mathfrak{g} \to G$ je def. vztahem

$$V \mapsto \exp(V) = \gamma^V(1)$$

Věta: Jednoparametrická podgrupa $\gamma^V(t)$ je dána pomocí exp. zobrazení jako

$$\gamma^V(t) = \exp(tV)$$

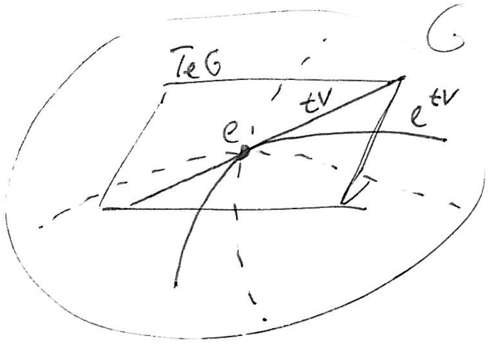
Dk: $\exp(tV) \equiv \gamma^{tV}(1) = \gamma^V(t)$; $\quad (\Leftrightarrow \gamma^{tV}(s) = \gamma^V(ts))$

- $\frac{d}{ds} f(\gamma^V(ts)) = \frac{d}{d(ts)} f(\gamma^V(ts)) \frac{d(ts)}{ds} = (tV)(f)$
- $\gamma^{tV}(0) = e = \gamma^V(t \cdot 0) = \gamma^V(0)$

$\Big\} \Rightarrow \gamma^{tV}(s)$ a $\gamma^V(ts)$ jsou stejné křivky

- <u>geometrický význam:</u>

$\gamma^V(t)$ je v G obrazem přímky tV v LA $\mathfrak{g}$



- spec: <u>$t=0$</u> $\Rightarrow \gamma^V(0) = e$

<u>$t=-1$</u> $\Rightarrow e^{-V} = \gamma^V(-1) = (\gamma^V(1))^{-1} = (e^V)^{-1}$

$\Uparrow$

$\gamma^V(1)\gamma^V(-1) = \gamma^V(1-1) = e$

Věta: Exp. zobrazení je lokální difeomorfismus mezi tečným prostorem T_eG a grupou G v okolí e.

- $(\Rightarrow)$ $\exists$ okolí $U(0)$ nulového vektoru v T_eG takové, že exp. zobrazení omezené na $U(0)$ je bijekce a $\exp(V)$ i $[\exp(V)]^{-1}$ jsou hladká zobrazení
- $(\Leftarrow)$ Každý bod $g \in U(e) \subset G$ z jistého okolí e lze zapsat jako $g = e^V$ pro nějaké $V \in T_eG$ z okolí nulového vektoru.

Dk (náznak):

- nechť $\{e_j\}$ je báze T_eG $\Rightarrow$ $V = x^j e_j$ je vektor z T_eG
- $\mathcal{G} \sim \mathbb{R}^n$ (jako všechny reálné lin. vekt. prostory dim$=n$)
  a G je v okolí e (resp. každého bodu) také lokálně izomorfní $\mathbb{R}^n$

  $\Rightarrow$ mohu zavést normální (kanonické) souřadnice
  a každému bodu $g \in \mathcal{U}(e) \subset G$ přiřadíme souřadnice
  $\{x^1, \dots, x^n\}$, kde x^i odpovídají složkám V v bázi $\{e_i\}$,
  ("na jehož tečné kolmice leží...") $\Leftrightarrow$ e_j jsou vekt. tečné k souřad. čarám
  (srov. $g = \exp \xi V \cong \mathbb{1} + \xi V$ $\Rightarrow$ každému bodu v $\mathcal{U}(e)$
  přísluší právě jeden vektor $\xi V \in T_eG$ a naopak) $\boxtimes$

- obecně to však neplatí globálně – ne každý prvek $g \in G$
  lze zapsat jako $g = \exp(V)$ pro $V \in T_eG$:
  i, G není souvislá – exp je hladké zobrazení
  $\Rightarrow$ zobrazuje pouze na <u>souvislou podgrupu</u>
  (komponenta souvislosti G obsahující e, např. $SO(3) \subset O(3)$)
  ii, G není kompaktní
  (např. $SL(2,\mathbb{R})$ – viz DÚ)

<u>Def:</u> <u>Exponenciální grupa</u> : $G = \exp \mathcal{G}$ (je celá pokrytá exp z LA)

<u>Věta:</u> Pokud G je kompaktní LG, pak každý prvek souvislé podgrupy lze vyjádřit jako e^V pro $V \in T_eG$.

- pro nesouvislé grupy platí

<u>Věta:</u> Každá komponenta souvislosti L.g. G je pravou třídou souvislé podgrupy.

<u>Dk:</u> Nechť H je komponenta souvislosti G, obsahující prvek g.
Potom množina $\{hg^{-1} / h \in H\}$ je také souvislá komponenta
($g \cdot h$ je hladké)
Tato množina navíc obsahuje $gg^{-1} = e$ $\Rightarrow$ $\{hg^{-1} / h \in H\} = \mathcal{G}$
je souvislá podgrupa a $H = \mathcal{G}g$ $\boxtimes$

- je $\{hg^{-1} / h \in H\}$ celá $\mathcal{G}$? Nechť $\exists\, s = pg^{-1}$ pro $p \notin H$ a $s \in \mathcal{G}$ $\Rightarrow$ spor: hladkým zobrazením jsem se dostal z jedné komponenty souvislosti na jinou ($p = p(t)$: $p(0) = g$ a $p(1) = p$)

<u>Př:</u> $O(2) = SO(2) \cup SO(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

už za chvíli

Def: <u>Exponenciální grupa</u> je grupa, pro kterou platí
$G = \exp \mathfrak{g}$

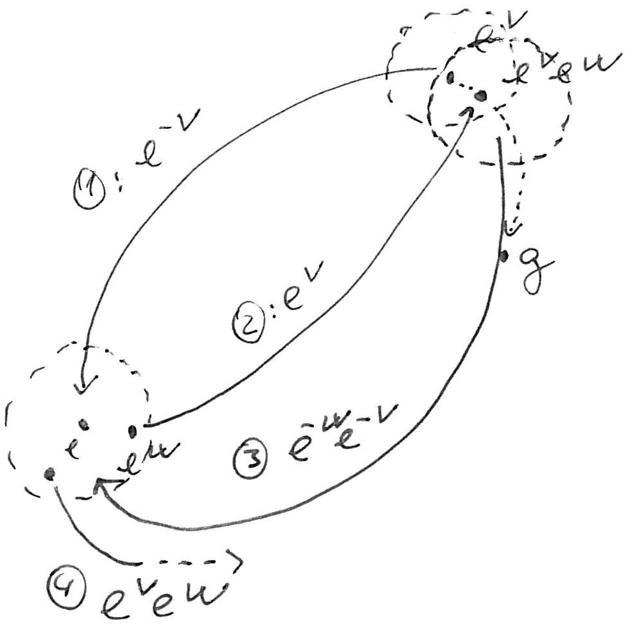
- je celá pokrytá exp. zobrazením

- pro ostatní grupy platí

<u>Věta:</u> Každý bod $g \in G$ L. grupy z její souvislé podgrupy lze zapsat jako <u>konečný součin</u> exponenciál prvků z příslušné L. algebry.

<u>Dk:</u> (náznak)

- nechť $e^V \in G$ $\Rightarrow$ $U(e^V)$ lze zobrazením e^{-V} zobrazit na okolí jednotky $U(e)$
- v okolí jednotky lze každý bod zapsat jako e^W
  $\Rightarrow$ levým posunutím pomocí e^V se dostaneme do bodu $e^V e^W$
  $\Rightarrow$ $U(e^V e^W)$ zobrazíme pomocí $(e^V e^W)^{-1} = e^{-W} e^{-V}$ do $U(e)$
  $\Rightarrow$ opakováním argumentu se dostaneme až do libovolného $g = e^V \prod_i e^{W_i}$
- lze toho dosáhnout konečným počtem kroků (netriviální část důkazu)



Def: <u>Homomorfismus mezi LG</u> $\phi: G \to G'$ je hladké zobrazení, které je zároveň homomorfismus v alg. smyslu.

Def: <u>Izomorfismus mezi LG</u> je difeomorfismus mezi hladkými varietami, který je zároveň homomorf. v alg. smyslu

Def: <u>Homomorfismus L. algeber</u> je lin. zobrazení $\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$, splňující

a) $\varphi(\alpha X + \beta Y) = \alpha \varphi(X) + \beta \varphi(Y)$ $\quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$

b) $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ $\quad \forall \alpha, \beta \in F$

($\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}'$ jsou nad stejným polem F)

Def: <u>Izomorfismus LA</u> je homomorfismus, který je prostý a „na".

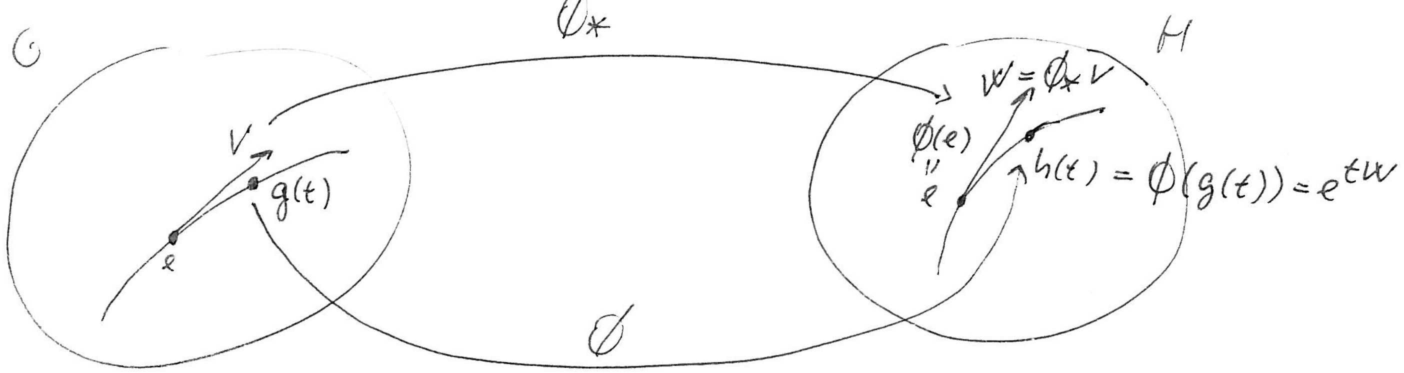
Odvozený homomorfismus Lieových algeber

<u>Věta:</u> 1, Nechť $\phi : G \to H$ je homomorfismus mezi Lieovými grupami a $g(t) = e^{tV}$ je jednoparam. podgrupa G. Potom $\phi(g(t)) = h(t)$ je jednoparam. podgrupa H a platí

$$h = e^{tW}, \quad W = \phi_* V \in T_e H.$$

2, $\phi_* : T_e G \to T_e H$ je <u>odvozený homomorfismus</u> Lieových algeber: lineární zobrazení $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$, přenášející Lieovu závorku: $\phi_*([x,y]) = [\phi_*(x), \phi_*(y)]$

$\Rightarrow$ homomorfismus mezi L. grupami automaticky indukuje homomorf. mezi algebrami:



$\Leftrightarrow$ komutační diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & H \\ \uparrow{\scriptstyle \exp} & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ T_e G & \xrightarrow{\phi_*} & T_e H \end{array} \qquad \phi \circ \exp = \exp \circ \phi_*$$

Dk: 1, ϕ je homomorf. $\Rightarrow h(t+s) = \phi(g(t+s)) \overset{\underset{\downarrow}{g \text{ 1-p pod } G}}{=} \phi(g(t)g(s)) = \phi(g(t))\phi(g(s))$

$\Rightarrow h(t+s) = h(t)h(s)$ je jednoparam. podgrupa

• h je jednoparam. podgr. $\Rightarrow \exists W \in T_e H : h = e^{tW}$

$$W(f) = \frac{d}{dt}\left(f(h(t))\right)\Big|_{t=0} \underset{\uparrow\, h=\phi(g)}{=} \frac{d}{dt} f\left(\phi(g(t))\right)\Big|_{t=0} \underset{\uparrow}{=} (\phi_* V)(f)$$

$g(t)$ je integ. křivka k V