VZTAH LIEOVÝCH GRUP A ALGEBER

<u>Def:</u> Podalgebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ L. algebry je podprostor $\mathcal{G}$, který tvoří algebru se stejným komutátorem a nad stejným polem jako $\mathcal{G}$.

- obecně platí, že LA $\mathcal{H}$ podgrupy $H \subset G$ je podprostorem LA $\mathcal{G}$:

  $\Leftarrow$ každá 1-p podgrupa $h(t) \subset H$ je zároveň podgrupou $h(t) \subset G$ $\Rightarrow$ odpovídající vektor $V^h \in \mathcal{H}$ musí ležet i v $\mathcal{G}$

- pro $H \subset G$ lineární grupy $\exists$ věrná reprezentace maticemi $n \times n$ $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ jsou izomorfní podprostorům matic a tedy $\mathcal{H}$ je podalgebra $\mathcal{G}$ (mají stejný komutátor)

<u>Věta:</u> Nechť φ je surjektivní homomorfismus $\mathcal{G} \xrightarrow{na} \mathcal{G}'$ mezi LA nad stejným polem. Potom

$$\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{G}' \Leftrightarrow \varphi \text{ je izomorfismus.}$$

<u>Dk:</u>
- $A_1, \dots, A_n$ – báze $\mathcal{G}$: $\quad \sum \alpha_i A_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$
- φ je lin. a přenáší komutátor:

$$\sum \alpha_i \varphi(A_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi\left(\sum \alpha_i A_i\right) = 0$$

<u>$\Leftarrow$|</u> • chci ukázat $\varphi(A_i)$ LN: $\sum \alpha_i \varphi(A_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

$0 = \sum \alpha_i \varphi(A_i) = \varphi\left(\sum \alpha_i A_i\right) \Rightarrow$ / φ izomorf: $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ /

$\Rightarrow \sum \alpha_i A_i = 0 \Rightarrow$ / A_i LN / $\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$ $\quad \square$

<u>$\Rightarrow$|</u> • stačí ukázat prostotu, surjektivitu předpokládám
- $\dim \mathcal{G}' = \dim \mathcal{G} \Rightarrow \varphi(A_i)$ LN ($\Leftarrow \varphi$ surjektivní a lin.)
- $\varphi(B) = \varphi(B') \Rightarrow \varphi(B - B') = 0$ & $B - B' = \sum \alpha_i A_i$

$\Rightarrow \varphi\left(\sum \alpha_i A_i\right) = 0 = \sum \alpha_i \varphi(A_i) \Rightarrow$ / $\varphi(A_i)$ LN / $\alpha_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow B - B' = 0 \Rightarrow \varphi$ prosté $\quad \boxtimes$

• <u>důsledek:</u> $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{G}$ je podalgebra $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{H} < \dim \mathcal{G}$

<u>Věta:</u> (algebry izomorfních grup)
Nechť $\phi: G \to G'$ je hladký izomorfismus. Potom odvozený homomorfismus $\phi_*: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ je izomorfismus.

<u>Dk:</u> • nechť $\phi_*(Y) = \phi_*(X)$ pro $X, Y \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow \exp(t\,\phi_*(X)) \equiv \phi(\exp(tX)) = \phi(\exp(tY)) \equiv \exp(t\,\phi_*(Y))$

$\Rightarrow$ /ϕ je prosté/ $\Rightarrow \exp(tX) = \exp(tY) \quad \forall t$

$\Rightarrow X = Y$ (vztah $\mathcal{J}^V(t)$ a V je jednoznačný)

$\Rightarrow \phi_*$ je prosté

• ϕ_* je surjektivní, neboť každá $\mathcal{J}'(t) \subset G'$ má vzor $\mathcal{J}(t) \subset G$ a tedy každý $X' \subset \mathcal{G}'$ má vzor v $\mathcal{G}$. $\boxtimes$

<u>Def:</u> Podgrupa H Lieovy grupy G je diskrétní, pokud je konečná nebo má spočetně mnoho prvků (a zároveň $\exists\, \mathcal{U}(e) \subset G$, které neobsahuje jiný prvek H než právě e $\Leftarrow$ plyne ze separability G)

<u>Věta:</u> Nechť ϕ je hladký surjektivní homomorfismus $\phi: G \to G'$ mezi LG a nechť $\operatorname{Ker}\phi$ je <u>diskrétní</u> podgrupa G. Potom odvozený homomorfismus $\phi_*: \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ je izomorfismus.

• ϕ je tzv. pokrývací homomorfismus

<u>Dk:</u> (náznak) • $\operatorname{Ker}\phi$ diskr. $\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}(e_G)$ takové, že $\operatorname{Ker}\phi/_{\mathcal{U}(e_G)} = \{e_G\}$

$\Rightarrow \phi$ je loc. izomorfismus $\mathcal{U}(e_G) \to \mathcal{U}'(e_{G'})$

$\Rightarrow G$ a G' mají stejnou dimenzi a jsou loc. izomorfní

$\Rightarrow \mathcal{G}$ a $\mathcal{G}'$ jsou izomorfní $\boxtimes$

Věta: (vynechat) (hladký) surjektivní

Nechť $\phi : G \overset{na}{\to} G'$ je homomorfismus mezi LG dimenzí n a n' a nechť $K = \operatorname{Ker}\phi$ je Lieova grupa. Potom $\dim K = (n - n')$ a LA K grupy K je invariantní podalgebra LA $\mathcal{G}$ grupy G.

Dk: • $\operatorname{Ker}\phi$ je norm. podgrupa $G \Rightarrow \mathcal{K}$ je invar. podalgebra $\mathcal{G}$ (důkaz později - potřebujeme adjung. repre)

• nechť $h = \exp(V) \in K$ pro $V \in \mathcal{K}$

$$\Rightarrow \phi(h) = e' = \exp(0)$$

• přitom odvoz. homomorf. dává

$$\phi_* V \left(= \frac{d}{dt}(\phi(\exp tV))\Big/_{t=0} \right) = 0$$

$$\Rightarrow V \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \phi_* V = 0$$

• nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze $\mathcal{G}$ uspořádaná tak, že $e_1, \dots, e_m$ je báze $\mathcal{K}$ ($m = \dim K$)

$$\Rightarrow \phi_* e_i = 0 \qquad i = 1, \dots, m$$

• nechť $\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \phi_* e_j = 0 \Rightarrow \phi_* \left(\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j e_j\right) = 0$

$\Rightarrow \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j e_j = 0$, neboť je to prvek $\mathcal{K}$ a přitom $e_j \in \mathcal{K}_\perp$ pro $j > m$

$\Rightarrow$ (e_j jsou LN) $\alpha_j = 0 \ \forall_j \Rightarrow \phi_* e_j$ jsou LN

(právě jsme ukázali $\sum_{j>m} \alpha_j \phi_* e_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall_{j>m}$)

• přitom $\phi_* : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ je homomorfismus algeber

$\Rightarrow \phi_* e_j$ $j > m$ tvoří bázi $\mathcal{G}'$ (ϕ je na G)

$$\Rightarrow \dim \mathcal{G}' = \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{K} \qquad \boxtimes$$

Univerzální pokrývací grupa

Def: centrum $Z(G) = \{h \in G / hg = gh \ \forall g\}$ je podgrupa $\forall$ prvků, které komutují se $\forall$ prvky z G

$\Rightarrow Z(G)$ je abelovská normální podgrupa G

Základní výsledek:

1, pro každou LA $\mathcal{G}$ $\exists!$ jednoduše souvislá tzv. univerzální pokrývací grupa $\overline{G}$

2, každá grupa G, jejíž LA je izomorfní $\mathcal{G}$, je izomorfní faktorgrupě $\overline{G}/K$, kde K je nějaká diskrétní normální podgrupa $\overline{G}$:

$$k_i \overline{g} = \overline{g} k_i \quad \forall k_i \in K \ \& \ \forall \overline{g} \in \overline{G}$$

- K je jádro nějakého homomorfismu, spec. $\pi : \overline{G} \to \overline{G}/K \quad \overline{g} \mapsto \overline{g}K$
- K je nutně centrální $[K \subset Z(\overline{G})]$, ne jen normální $(k_i \overline{g} = \overline{g} k_j)$
- pro lin. grupy K obsahuje jen násobky $\mathbb{1}$ ($\Leftarrow$ Schur II)

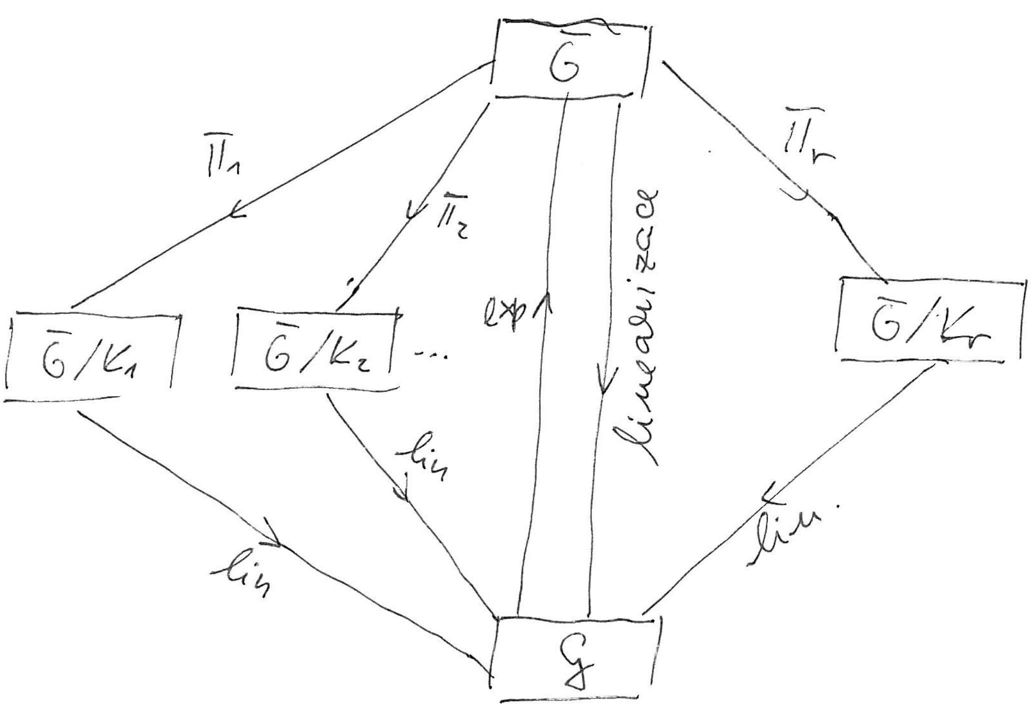
3, pokud je G jednoduše souvislá, pak $G \sim \overline{G}$

(4, každá reprezentace LA $\mathcal{G}$ je L. algebra nějaké reprezentace LG $\overline{G}$)

Př: • protože $SU(2)$ je jednoduše souvislá, je to univ. pokrývací grupa $SU(2) \sim SO(3)$

• $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ je jediná netriv. normální podgr. $SU(2)$

$\Rightarrow SO(3) \sim SU(2)/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ je jediná neizomorfní LG s algebrou $su(2)$



• doplnit: • LA norm. podgrupy je ideál

• $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ norm. podalgebry $\mathcal{G} \Rightarrow [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ norm. podalg. $\mathcal{G}$

NB: Pokrývací prostor topol. prostoru (X,τ) je topol. prostor (C,ρ) spolu se spojitým surjektivním zobrazením $p:(C,\rho) \xrightarrow{na} (X,\tau)$ takovým, že

$\forall x \in X \ \exists\, \mathcal{U}(x) \in \tau : p^{-1}(\mathcal{U}(x)) = \bigcup_\alpha V_\alpha \quad V_\alpha \subset (C,\rho) \ \& \ V_\alpha \cap V_{\alpha'} = \emptyset$

a V_α jsou homeomorfní k $\mathcal{U}(x)$ zobrazením p.

Př: $\overline{SO(2)} = (\mathbb{R},+)$; jedná se o nekonečně-nás. pokrytí:

$\pi : (\mathbb{R},+) \to SO(2) \qquad \varphi \to e^{i\varphi}$; $e^{i(\varphi+2\pi k)} = e^{i\varphi}$

Pozn: • ne $\forall$ repre $\bar G$ jsou zároveň reprezentacemi ostatních G se stejnou $\mathcal{G}$ (víceznačnost reprezentací; viz "poločíselné" reprezentace $SU(2)$, které jsou pro $SO(3)$ dvojznačné

• $\bar G$ je pro danou $\mathcal{G}$ fundamentální, jen ona dává kompletní popis fyz. systému