REPREZENTACE L. ALGEBER

Def: Reprezentace LA $\mathcal{G}$ na prostoru V je homomorfismus
$$\phi : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(V)$$
(NB: i nimunertonadelná zobrazení – $\mathrm{Ker}\,\phi \neq 0$)

Def: (maticová reprezentace LA)

d-rozměrná mat. reprezentace LA $\mathcal{G}$ nad polem F je přiřazení $d \times d$ matice $D(X)$ každému prvku $X \in \mathcal{G}$ takové, že

i) $D(\alpha X + \beta Y) = \alpha D(X) + \beta D(Y)$

ii) $D([X,Y]) = [D(X), D(Y)]$

$\forall X, Y \in \mathcal{G}$ a $\forall \alpha, \beta \in F$.

- pro konstrukci repre LA stačí najít matice odpovídající bázi LA
- nulová repre LA: $D(X) = 0 \;\; \forall X \in \mathcal{G}$
- reducibilní, ireducibilní, úplně reducibilní, ekvivalentní repre definovány stejně jako pro grupy
- reducibilitu stačí ověřovat pro prvky báze
- operátorová repre: (až dále...)
$$T_g(X)\, \psi_j = \sum_k \psi_k\, D_g(X)_{kj} \qquad \text{– jako pro repre grupy}$$
- Schurova lemmata platí i pro LA:

  1, Nechť D a D' jsou dvě IR LA dimenzí d a d' a nechť A je matice $d \times d'$, splňující
  $$D(X)A = AD'(X) \quad \forall X \in \mathcal{G}.$$
  Potom buď $A = 0$ nebo $d = d'$ a $\det A \neq 0$.

  2, Nechť D je d-dim IR LA $\mathcal{G}$ a B je $d \times d$ matice
  $$D(X)B = BD(X) \quad \forall X \in \mathcal{G}.$$
  Potom $D = \lambda \mathbb{1}_{d \times d}$

- jako pro grupy, $\forall$ IR abelovské LA jsou 1-dim

- pro konstrukci repre LA z repre LG potřebujeme umět derivovat ⇒

<u>Def: Analytická repre LG G</u> je reprezentace, jejíž prvky $D(g(x_1, \dots, x_n))$ jsou analytické funkce lokálních souřadnic x_i na varietě v okolí jednotky.

- neboli každý element matice $D(g)$ lze rozvinout do Tayl. řady v jistém okolí $e = g(0, \dots, 0)$
  ⇒ platí to na celé grupě díky rozšíření levým posunutím.

<u>Věta:</u> Nechť D_G je d-rozměrná maticová analytická repre LG G, jejíž LA je $\mathfrak{g}$. Potom

1, Matice $D_{\mathfrak{g}}$ definované pro $\forall X \in \mathfrak{g}$ jako

$$D_{\mathfrak{g}}(X) = \frac{d}{dt} D_G(\exp tX)\Big|_{t=0} \qquad (*)$$

tvoří d-dim repre LA $\mathfrak{g}$ a pro $\forall X \in \mathfrak{g}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(t D_{\mathfrak{g}}(X)) = D_G(\exp(tX)) \qquad (**)$$

(NB: $\exp(tX) \in G$ $\forall t$ i pokud exp nepokrývá celou G)

2, Nechť D_G a D'_G jsou dvě d-dim anal. repre G a $D_{\mathfrak{g}}$ a $D'_{\mathfrak{g}}$ příslušné repre $\mathfrak{g}$ def. pomocí $(*)$.
Potom $D_G \sim D'_G \Rightarrow D_{\mathfrak{g}} \sim D'_{\mathfrak{g}}$.
Opačná implikace platí pro souvislou G.

3, D_G je redukc. $\Rightarrow D_{\mathfrak{g}}$ je reducibilní
Opačná implikace pro souvislou G.

4, D_G úplně reducibilní $\Rightarrow D_{\mathfrak{g}}$ je úplně reducibilní.
$\Leftarrow$ pro souvislou G

5, Je-li G souvislá, potom
$$D_G \text{ je IR} \Leftrightarrow D_{\mathfrak{g}} \text{ je IR}$$

6) Je-li D_G unitární, potom $D_{\mathcal{G}}(X)$ je anti-hermitovská $\forall X \in \mathcal{G}$.
$\Leftarrow$ pro souvislou G.

Dk: 1) (**) je odvozený homomorf. (A pro $\phi: G \to Aut(V)$ a $\phi_*: \mathcal{G} \to End(V)$. (*) potom dostaneme derivováním (**) díky analytičnosti. $\boxtimes$ 1)

2) • $D_G \sim D_G'$: $D_G'(g) = S^{-1} D_G(g) S$
• $\exp(S^{-1} g S) = S^{-1} \exp(g) S$

$\boxed{\Rightarrow}$ $D_{\mathcal{G}}'(X) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt} (S^{-1} D_G(\exp tX) S)\Big/_{t=0} \overset{(**)}{=} \frac{d}{dt} S^{-1} \exp(t D_{\mathcal{G}}(X)) S \Big/_{t=0}$

$= \frac{d}{dt} \exp(t S^{-1} D_{\mathcal{G}}(X) S)\Big/_{t=0} = S^{-1} D_{\mathcal{G}}(X) S$

$\boxed{\Leftarrow}$ • je-li G souvislá, potom libovolný $g \in G$ lze zapsat jako $g = \prod_i e^{t_i X_i}$ pro $X_i \in \mathcal{G}$, $i = 1, \dots, m$
a z (**) plyne $D_{\mathcal{G}}'(X) = S^{-1} D_{\mathcal{G}}(X) S \Rightarrow$
$D_G'(\exp(tX)) = \exp(t D_{\mathcal{G}}'(X)) = S^{-1} \exp(t D_{\mathcal{G}}(X)) S$
$= S^{-1} D_G(\exp tX) S$ $\boxtimes$ 2)

3 & 4): $\boxed{\Rightarrow}$ plyne okamžitě z (*).
$\boxed{\Leftarrow}$ plyne z toho, že blok. struktura se zachovává v každé mocnině $\Rightarrow$ (**) v exp a opět ze zápisu $g = \prod_i \exp(t_i X_i)$ pro souvislou G

5) přímý důsledek 3

6) plyne přímo z (**), ekvivalence pro souvislou G opět z $g = \prod_i \exp(t_i X_i)$

- věta neříká, že každá $D_{\mathcal{G}}$ LA $\mathcal{G}$ dává pomocí exp reprezentaci grupy G
- ani pokud $\exp(t\, D_{\mathcal{G}}(X))$ je dobře def. pro $\forall X \in \mathcal{G}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ nemusí tyto matice tvořit repre G, je nutné to ověřit
- pouze je-li D_G analytická, potom věta říká, že je lze získat z odpovídající repre LA pomocí exp

$\Rightarrow$ ne všechny repre LA lze získat diferencováním nějaké reprezentace příslušné grupy – to lze jen pro jednoduše souvislou G (tj. univ. pokrývací grupu příslušné algebry)

Př: $G = SO(2)$ a $\mathcal{G} = so(2)$

- $\mathcal{G}$ je 1-rozměrná, báze v def. reprezentaci je

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(t e_1) = \begin{pmatrix} ct & st \\ -st & ct \end{pmatrix} \qquad (+)$$

- strukt. konstanty: $[e_1, e_1] = 0$

$\Rightarrow D_{\mathcal{G}}(e_1) = p$ je 1-dim repre $\mathcal{G}$ pro lib. $p \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \exp(t\, D_{\mathcal{G}}(e_1)) = \exp(tp) \qquad (++)$$

- $(+)$ říká $\exp((t+2\pi)e_1) = \exp(t e_1)$, ale $(++)$ dává

$$\exp((t+2\pi)p) = \exp(2\pi p)\exp(t\, D_{\mathcal{G}}(e_1))$$

$\Rightarrow \exp(tp)$ je reprezentace $SO(2)$ pouze pro $p = ik$, $k \in \mathbb{Z}$.

Př: Vztah reprezentací $SO(3)$ a $so(3)$

- $so(3) \simeq su(2) \Rightarrow \exists$ 2-rozměrná repre $so(3)$ daná reprezentací báze pomocí Pauliho matic (viz dříve):

$$D_g(e_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad D_g(e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_g(e_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(t D_g(e_3)) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{1}{2}it) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2}it) \end{pmatrix} \overset{t \to t+2\pi}{\Rightarrow} -\begin{pmatrix} \cdot & 0 \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

- přitom v definující 3-dim reprezentaci

$$\exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ct & st & 0 \\ -st & ct & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{t \to t+2\pi}{\Rightarrow} + \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ exponenciála 2-dim repre $so(3)$ nedává repre $SO(3)$

$\circledast$ víceznačné repre a univ. pokrývací grupa (41b)

Operátorové reprezentace (T jsou lin. operátory na V, ψ_j je báze V)

$$T_G(\exp(tX))\psi_j = \sum \psi_k D_G(\exp(tX))_{kj}$$

$$T_g(X)\psi_j = \sum \psi_k D_g(X)_{kj}$$

$$\Rightarrow \quad (*) \qquad T_g(X) = \frac{d}{dt} T_G(\exp(tX))\Big|_{t=0}$$

$$(**) \qquad \exp(t T_g(X)) = T_G(\exp(tX))$$

$\Rightarrow T_G$ i T_g působí na stejném V, ψ_j je báze T_G i T_g

Přímý součin reprezentací

- jaká repre LA g odpovídá reprezentaci LG G

$$T_G = T_G^\mu \otimes T_G^\nu \,?$$

$$\Leftrightarrow T_G(\exp tX)(\psi_j^\mu \otimes \varphi_i^\nu) = \sum_{kl}\left[D_G^\mu(\exp tX) \otimes D_G^\nu(\exp tX)\right]_{kl,ji} (\psi_k^\mu \otimes \varphi_l^\nu)$$

$$\left(T_G^\mu(\exp tX)\psi_j^\mu = \sum_k D_G^\mu(\exp tX)_{kj} \psi_k^\mu, \ldots \right)$$

(*) (41b)

- je-li $\bar{G}$ univerzální pokrývací grupa, potom $D_{\bar{G}}$ dává reprezentaci $G \sim \bar{G}/K$ skrze homomorfismus

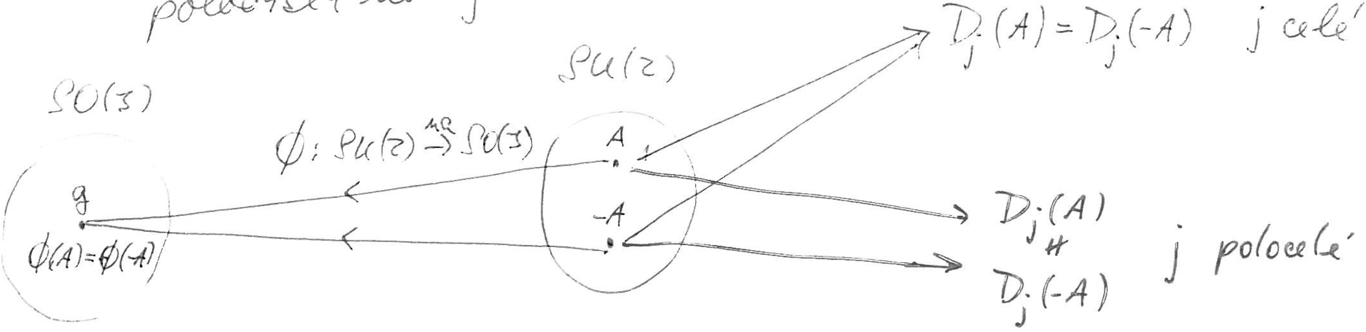
$$\phi : \bar{G} \to G \quad \text{s diskrétním jádrem } K$$

$D_G(\phi(g)) = D_{\bar{G}}(g)$, pokud pro $\forall k_i \in K$ platí

$$D_{\bar{G}}(k_i g) = D_{\bar{G}}(g) \qquad \forall g \in G$$

- pokud $D_{\bar{G}}(k_i G) \neq D_{\bar{G}}(g)$, dostáváme <u>víceznačnou reprezentaci</u> G

- <u>Př:</u> $2j+1$-rozměrné reprezentace $SU(2)$ pro poločíselné j



$\Rightarrow$ každá repre $SO(3)$ dává reprezentaci $SU(2)$, ale ne každá repre $SU(2)$ dává reprezentaci $SO(3)$

- lze ukázat, že jsou-li LA G_1 a G_2 dvou jednoduše souvislých grup izomorfní, potom jsou tyto grupy izomorfní ($\Leftrightarrow$ UPG je právě jedna)

Adjungovaná (přidružená) reprezentace

Věta: Nechť $\mathcal{G}$ je reálná nebo komplexní LA dimenze n a nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze $\mathcal{G}$. Pro libovolné $X \in \mathcal{G}$ definujme $ad(X)$ jako matici $n \times n$ vztahem

$$[X, e_j] = \sum_{k=1}^{n} (ad(X))_{kj}\, e_k \qquad j = 1, \dots, n$$

Potom matice $ad(X)$ tvoří n-rozměrnou <u>adjungovanou reprezentaci</u> LA $\mathcal{G}$.

- NB: už jsme viděli v úvodním příkladu $SO(3)$, že
  $(e_i)_{jk} = C^j_{ik}$ reprezentuje LA, což je
  přesně def. adj. reprezentace : $\boxed{(ad(e_i))_{kj} = C^k_{ij}}$

Dk: • $ad(X)$ je dobře def., neboť $X \in \mathcal{L}$ a tedy $[X, e_j] \in \mathcal{L}$ a je to lin. kombinace báze

• díky linearitě komutátoru zjevně platí
$$ad(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, ad(X) + \beta\, ad(Y)$$

• komutátor dostaneme díky Jacobiho identitě
(Dcv – viz úvodní příklad)

$$[[X, Y], e_j] = \sum_k e_k (ad([X, Y]))_{kj}$$

$\parallel$ Jacobi

$$-[[Y, e_j], X] - [[e_j, X], Y] = -\sum_k (ad(Y))_{kj} [e_k, X] + \sum_k (ad(X))_{kj} [e_k, Y]$$

$$= \sum_{kl} e_l (ad(X))_{lk} (ad(Y))_{kj} - \sum_{kl} e_l (ad(Y))_{lk} (ad(X))_{kj}$$

$$\Rightarrow ad([X, Y])_{lj} = \sum_k (ad(X))_{lk} (ad(Y))_{kj} - (ad(Y))_{lk} (ad(X))_{kj}$$

$$= [ad(X), ad(Y)]_{lj}$$

$\boxtimes$

• adj. repre je působení $\mathcal{G}$ na sobě: definuje zobrazení

$$\mathrm{ad}: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G} \qquad \mathrm{ad}(X)\,Y \longmapsto [X, Y]$$

• $\mathrm{ad}(X)$ je lin. operátor, při změně báze $S: e_i \mapsto e_i'$ se transformuje jako

$$\mathrm{ad}(X) \mapsto S^{-1}\,\mathrm{ad}(X)\,S$$

Věta: Nechť G je lin. LG a $\mathcal{G}$ její LA. Potom pro $\forall g \in G$ a $\forall X \in \mathcal{G}$ platí

$$gXg^{-1} \in \mathcal{G}$$

a pro $g = \exp(tY)$, $Y \in \mathcal{G}$ platí

$$\exp(tY)\,X\,[\exp(tY)]^{-1} = X + t[Y, X] + \frac{1}{2!}t^2[Y,[Y,X]] + \dots$$

Dk: • věta platí pro lineární ≡ maticovou LG a tedy gXg^{-1} je násobení matic stejné dimenze ve věrné reprezentaci grupy G (zde X není nutně $\mathrm{ad}(X)$)

• uvažujme jednoparam. podgrupu G

$$\gamma(s) = g\exp(sX)g^{-1} \subset G, \quad g \in G \quad X \in \mathcal{G} \quad a \quad s \in \mathbb{R}$$

$g\exp(sX)g^{-1} = \exp(s\,gXg^{-1}) \Rightarrow$ generátor této podgrupy je $gXg^{-1} \in \mathcal{G}$ (nebo mohu derivovat $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}$)

• nechť $F(t) = \exp(tY)X(\exp(tY))^{-1} = \exp(tY)X\exp(-tY) \Rightarrow$

$$\frac{dF}{dt} = [Y, F(t)] \qquad \text{(Dcv.)}$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = [Y,[Y,F(t)]] \quad \dots$$

& $F(t)$ je analytická (exp, mat. násobení) $\Rightarrow$ tvrzení věty je jen Taylor. řada

$\boxtimes$

Věta: Nechť G je lin. LG dimense n a $e_1, \dots, e_n$ je báze odpovídající LA $\mathfrak{g}$. Definujme pro $\forall g \in G$ matici $n \times n$

$$Ad(g): \quad g e_i g^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (Ad(g))_{ki}\, e_k \qquad i = 1, \dots, n$$

Potom:

i) matice $Ad(g)$ tvoří n-rozměrnou analytickou reprezentaci G, kterou nazýváme adjungovanou

ii) odpovídající reprezentace $\mathfrak{g}$ získaná ze vztahu (*)

$$ad(X) = \frac{d}{dt} Ad(\exp tX)\Big|_{t=0} \qquad \forall X \in \mathfrak{g}$$

je adjungovaná repre $\mathfrak{g}$ $ad(X)$ a platí

$$\exp(t\, ad(X)) = Ad(\exp(tX))$$

- pro obecnou L.G. definujeme $Ad(g)$ pomocí automorfismu sdružení

$$I_g: G \to G \qquad h \mapsto g h g^{-1}$$

jako odpovídající odvozený homomorfismus

$$Ad(g) \equiv (I_g)_*: \quad g \exp(X) g^{-1} = \exp(Ad(g) X)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I_g"] & G \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "(I_g)_*", "\equiv Ad(g)"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \qquad Ad(g): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$\Rightarrow$ $Ad(g)$ je skutečně reprezentace $(Ad(g), \mathfrak{g})$ def. pomocí působení grupy na příslušné Lieově algebře

$\Rightarrow$ pro mat. grupu dostáváme definici z Věty, neboť

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(g X g^{-1}) = \exp(Ad(g) X)$$

Dk: • víme $g e_i g^{-1} \in \mathcal{G}$ (předchozí věta) $\Rightarrow$ je to skut. lin. kombinace vekt. e_k $\Rightarrow (Ad(g))_{ki}$ je dobře def.

i) $$(gg')e_i(gg')^{-1} = g(g'e_i g'^{-1})g^{-1} = \sum_l g e_l g^{-1} (Ad(g'))_{li}$$

$$= \sum_{lk} (Ad(g))_{kl} (Ad(g'))_{li}\, e_k$$

$$\Rightarrow (Ad(gg'))_{ki} = (Ad(g)Ad(g'))_{ki} \quad \checkmark$$

• analytičnost repre je opět přímý důsledek předchozí věty (v okolí jednotky lze $g = e^{tY}$ a analytičnost na $U(e) \Rightarrow$ analytičnost na G)

ii) $Ad(\exp(tY))$ /předchozí věta/:

$$Ad(\exp(tY))X = \exp(tY)X\exp(-tY) = X + t[Y,X] + o(t)$$

$$= [\mathbb{1} + t\, ad(Y)]X + o(t)$$

$$\Rightarrow ad(Y) = \frac{d}{dt}\left(Ad(tY)\right)\Big|_{t=0} \qquad \boxtimes$$

• význam adjungované reprezentace - studium polojednoduchých L. algeber