STRUKTURA PROSTÝCH A POLOPROSTÝCH LA

- ∃ komplexní klasifikace (Cartanovy podalgebry → Dynkinovy diagramy)
- význam především v částicové fyzice

<u>Def:</u> <u>Podalgebra</u> $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ L. algebry $\mathcal{G}$ je podprostor $\mathcal{G}$, který tvoří uzavřenou algebru se stejným komutátorem

<u>NB:</u> $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{G} \Rightarrow \dim \mathcal{H} < \dim \mathcal{G}$ (∃ prvek báze $\mathcal{G}$, který není obsažen v $\mathcal{H}$)

<u>Def:</u> Podalgebra $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ je <u>invariantní</u> (<u>ideál</u>), pokud $\forall A \in \mathcal{H}$ & $\forall B \subset \mathcal{G}$ $[A, B] \in \mathcal{H}$.

<u>Def:</u> (řešitelná LA)
LA $\mathcal{G}$ je řešitelná, pokud $\exists n > 0 : D^n \mathcal{G} = \emptyset$, kde $D^k \mathcal{G}$ je def. jako $D^0 \mathcal{G} \equiv \mathcal{G}$ a $D^{k+1}\mathcal{G} \equiv [D^k \mathcal{G}, D^k \mathcal{G}]$ a $[\mathcal{G}, \mathcal{G}'] \equiv \{[A, B] \mid A \in \mathcal{G} \;\&\; B \in \mathcal{G}'\}$.
- $D^k \mathcal{G} \neq \emptyset \Rightarrow D^k \mathcal{G}$ je ideál $\mathcal{G}$

<u>Def:</u> $\mathcal{G}$ je <u>poloprostá</u>, pokud neobsahuje neprázdný řešitelný ideál. ($\Longleftrightarrow$ neobsahuje abelovskou invar. podalgebru)
(Cornwell V2, str. 487)

<u>Def:</u> $\mathcal{G}$ je <u>prostá</u>, pokud je neabelovská a neobsahuje netriviální ideál.

<u>NB:</u>
- <u>prostá LG:</u> nemá netriviální invar. podgrupu (netriv)
  ($\Leftarrow$ má prostou LA)
- <u>poloprostá LG:</u> nemá abelovskou norm. podgrupu
  ($\Leftarrow$ má poloprostou LA)

<u>Věta:</u> L. algebra normální L. podgrupy LG G je invariantní podalgebra L. algebry $\mathcal{G}$: $H \subset G$ normální
$\Rightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ ideál.
(platí pro grupy konečné dimenze)

Dk: • pro grupy konečné dimenze platí, že L. algebra L. podgrupy je L. podalgebrou LA "velké" grupy

- viz např. Pontryagin, Topological groups (1966; Th. 83 str. 385;
- viz také odvozený homomorfismus k homomorfismu vnoření $(H \subset G)$

$$\phi : H \to G \Rightarrow \phi_* : \mathcal{H} \to \mathcal{G} :$$

ϕ_* přenáší komutátor + každá křivka v H je zároveň křivka v G $\Rightarrow \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ podprostor uzavřený vůči komutátoru

• uvažujme $g(t) \subset G$ a $h(t) \subset H$ 1p-podgrupy v G a H s tečnými vektory $A \in \mathcal{G}$ resp. $B \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow c(t) = h(t)\, g(t)\, h(t)^{-1} g(t)^{-1}$ je 1p-podgrupa v G

$\Rightarrow$ tečný vektor $c(\sqrt{t})$ je komutátor $C = [A, B]$

(Dk. pro mat. grupy; obecně lze pomocí křivky $c(t)$ komutátor na LG i definovat (Pontryagin))

• je-li H normální podgr., potom $ghg^{-1} \in H$

$\Rightarrow c(t) \subset H \Rightarrow [A, B] \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}$ je ideál $\boxtimes$

Def: <u>Killingova - Cartanova forma</u> je symetrické bilineární zobrazení $B : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$B(X, Y) \equiv Tr\left(ad(X)\, ad(Y)\right) \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}$$

• je-li $\mathcal{G}$ reálná, potom maticové elementy $ad(X) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow B$ zobrazuje do $\mathbb{R}$ (nemusí platit pro obecnou repre - viz Pauliho matice)

• pro komplexní $\mathcal{G}$ $B \in \mathbb{C}$

• $B(X, Y)$ je invariantní vůči všem automorfismům z $Aut(\mathcal{G}) \Rightarrow$ je nezávislá na bázi:

$$ad(X) \longmapsto S^{-1} ad(X) S \quad \text{se pod } Tr \text{ neprojeví}$$

Def: <u>Killingova - Cartanova metrika</u> (lze zavést díky nezávislosti formy na bázi) na LA $\mathcal{G}$:

$$\underline{g_{ij} \equiv B(e_i, e_j)} = c_{il}^{k} c_{jk}^{l} = g_{ji} \qquad \left(\Leftarrow [e_i, e_l] = \sum_k e_k (ad(e_i))^k_l\right)$$

- transformuje se jako tenzor 2. řádu

Př: • <u>su(2)</u>

- $c_{ij}^{k} = \varepsilon_{ijk} \Rightarrow ad(e_i)^j_k = \varepsilon_{ijk}$ & $\varepsilon_{ijs}\varepsilon_{kls} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj}$

$$\Rightarrow Tr\,[ad(e_i)\,ad(e_j)] = \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jlk}$$

$$= -\delta_{ij}\delta_{ll} - \delta_{il}\delta_{jl} = \underline{-2\delta_{ij} = B(e_i, e_j)}$$

- metrika g_{ij} je nedegenerovaná ($\Leftarrow \det g = -8 \Leftrightarrow \nexists X : g(X,Y) = 0 \ \forall Y$)

  $\Rightarrow g_{ij}$ definuje skal. součin na $\mathcal{G} = su(2)$

- <u>$gl(n, \mathbb{R})$</u> (Dcv. - Fecko str. 264)
  - Weylova báze $\Rightarrow B(X,Y) = 2n\,Tr(XY) - 2\,Tr(X)\,Tr(Y)$
  - metrika je degenerovaná: $B(\mathbb{1}, Y) = 0$

$\Rightarrow$ • <u>$sl(n, \mathbb{R})$</u>: $Tr(X) = 0 \Rightarrow B(X,Y) = 2n\,Tr(XY)$

<u>Věta:</u> (Vlastnosti K-C formy na $\mathcal{G}$)

1, $B(X,Y) = B(X,Y)$

2, $B(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta\, B(X,Y)$

3, $B(X, Y+Z) = B(X,Y) + B(X,Z)$

4, $\varphi \in Aut(\mathcal{G}) \Rightarrow B(\varphi(X), \varphi(Y)) = B(X,Y)$

5, $B([X,Y], Z) = B(X, [Y,Z])$

! 6, Je-li $\mathcal{G}'$ ideál $\mathcal{G}$ a $B_{\mathcal{G}'}$ je K-C forma na $\mathcal{G}'$, potom $B(X,Y) = B_{\mathcal{G}'}(X,Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}'$

<u>Dk:</u> Dcv., Cornwell V. 2, str. 822

Věta: (Cartanovo 1. kritérium)

LA $\mathcal{G}$ je <u>řešitelná</u> $\Leftrightarrow$ $B(X,Y)=0 \quad \forall X,Y \in \mathcal{G}^{(1)} = [\mathcal{G},\mathcal{G}]$

! **Věta:** (Cartanovo 2. kritérium)

LA $\mathcal{G}$ je <u>poloprostá</u> $\Leftrightarrow$ K-C forma $B(X,Y)$ je nedegenerovaná

($\Leftrightarrow$ $\det g \neq 0$)

Věta: (také def. kompaktní LA)

LG G je <u>kompaktní</u> $\Leftrightarrow$ <u>K-C forma</u> na její LA $\mathcal{G}$ je <u>negativně definitní</u>.

Důsledek: Každá <u>kompaktní</u> LG <u>je poloprostá</u>.

Pozn: (Gilmore, 2008)

- obecně se LA rozpadá na 3 podprostory podle signatury B,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_- + \mathcal{G}_0$$

Pro LA platí:
$\{\text{abelovská}\} \subsetneq \{\text{nilpotentní}\} \subsetneq \{\text{řešitelná}\}$

- $\mathcal{G}_-$ je podalgebra $\mathcal{G}$ (není invar.), která se skrze exp zobrazí na kompaktní varietu; $\exp(\mathcal{G}_-)$ není obecně podgrupa
- $\mathcal{G}_+$ není podalgebra, $\exp(\mathcal{G}_+)$ je nekompakt. varieta
- $\mathcal{G}_0$ je <u>nilpotentní</u> ideál $\mathcal{G}$; nilpotentní $\Rightarrow$ řešitelná

$\Updownarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}: [X_1,[X_2,\dots,[X_n,Y]]\dots] = 0 \quad \forall X_1,\dots,X_n,Y \in \mathcal{G}_0$

- $\exp(\mathcal{G}_0)$ je maximální invar. <u>nilpotentní</u> podgr. $H \subset G$

$\Updownarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}: H_n = \{e\}$ pro $H_{i+1} = \{h_i h h_i^{-1} h^{-1} \mid h_i \in H_i \;\&\; h \in H\}$
$\equiv [H_i, H]$

$\Rightarrow$ nilpot. grupa je „skoro abelovská"

Příklad: $sl(2,\mathbb{R})$ – bezestopé matice 3×3 (prostá algebra)

- báze algebry je např.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- strukt. konstanty

$$[X_1, X_2] = 2X_2 \quad \Rightarrow \quad C_{12}^2 = 2 = -C_{21}^2$$

$$[X_1, X_3] = -2X_3 \quad \Rightarrow \quad C_{13}^3 = -2 = -C_{31}^3$$

$$[X_2, X_3] = X_1 \quad \Rightarrow \quad C_{23}^1 = 1 = -C_{32}^1$$

- adjungovaná reprezentace $sl(2,\mathbb{R})$

$$(ad(X_i))_{jk} = C_{ij}^k$$

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad ad(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- K-C metrika:

$$g_{ij} = Tr(ad(X_i)ad(X_j)) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ diagonalizací v bázi $X_1,\ X_\pm = X_2 \pm X_3$ dostáváme

$$g = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_+ \\ X_- \end{array} \end{array}$$

$$X_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tX_-) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kružnice } S^1$$

$$\left.\begin{array}{l} X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tX_+) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tX_1) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nekompaktní varieta } M$$

$\Rightarrow$ varieta $SL(2,\mathbb{R})$ je $S^1 \times M$ (více v DÚ)

• obecně tedy mohu psát pro každou $V \in sl(2,\mathbb{R})$

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \exp$ $\qquad$ $\downarrow \exp$ $\qquad$ (symbolicky, matice nekomutují! (*))

$$g = \begin{pmatrix} z+y & x \\ x & z-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos c & \sin c \\ -\sin c & \cos c \end{pmatrix}$$

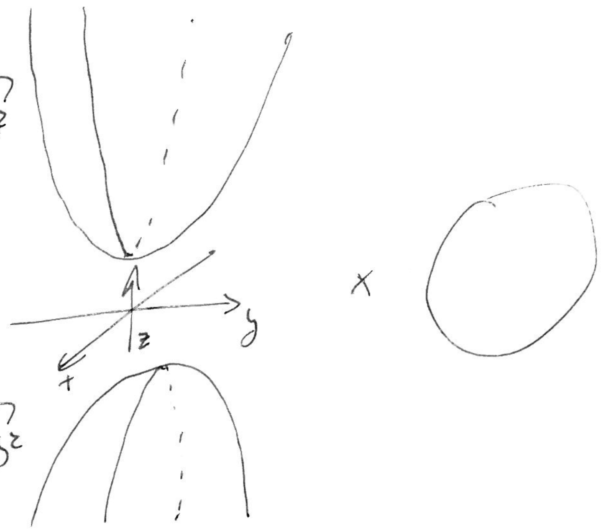
$$g_1 = \exp\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} r + \frac{a \operatorname{sh} r}{r} & \frac{b \operatorname{sh} r}{r} \\ \frac{b \operatorname{sh} r}{r} & \operatorname{ch} r - \frac{a \operatorname{sh} r}{r} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z+y & x \\ x & z-y \end{pmatrix}$$

$(r^2 = a^2 + b^2)$

přitom $\det g_1 = 1 = z^2 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow$ varieta je $H^2 \times S^1$ ... hyperboloid $\times$ kružnice

$z = \sqrt{1+x^2+y^2}$



$z = -\sqrt{1+x^2+y^2}$

NB: exponenciací dostáváme jen $z = \cosh r > 0$!

$\Rightarrow$ jen část $H^2_+ \times S_1$

(*) $\begin{pmatrix} \cos c & \sin c \\ -\sin c & \cos c \end{pmatrix}$ je rovněž podgrupa $SL(2,\mathbb{R})$ izomorfní $SO(2)$

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{R}) = SO(2) + g_1 \cdot SO(2) + \dots + g_n \cdot SO(2)$

$\Rightarrow$ $\forall$ prvky lze zapsat jako $g = A \cdot B$, kde A je sym. mat a $B \in SO(2)$, přitom $\det A = \det B = 1$

$A = (gg^T)^{1/2}$

$B = A^{-1} g$

Věta: Je-li LA $\mathcal{G}$ poloprostá, potom je její adjung. repre věrná.

Dk: • chci ukázat prostotu $ad : \mathcal{G} \to End(\mathcal{G})$ ⇒ pro spor

$\exists X, Y \in \mathcal{G} : ad(X) = ad(Y)$ & $X \neq Y$

$\Rightarrow 0 = ad(X) - ad(Y) = ad(X-Y)$

$\Rightarrow ad(X-Y)\,ad(Z) = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{B}(X-Y, Z) = 0$

⇒ $\mathcal{B}$ degenerovaná ⇒ $\mathcal{G}$ není poloprostá ↯ $\boxtimes$

Věta: Je-li LA $\mathcal{G}$ prostá, potom je její adjung. repre ireducibilní.

Dk: • $ad : \mathcal{G} \to \mathcal{G} \qquad ad(X)Y = [X, Y]$

• je-li ad reducibilní, potom $\exists \mathcal{G}' \subsetneq \mathcal{G}$:

$ad(X)Y' \in \mathcal{G}' \quad \forall X \in \mathcal{G} \quad \forall Y' \in \mathcal{G}'$

$\Rightarrow [X, Y'] \in \mathcal{G}' \Rightarrow \mathcal{G}'$ je ideál $\mathcal{G}$ ⇒ $\mathcal{G}$ není prostá $\boxtimes$

Def: LA $\mathcal{G}$ je přímým součtem dvou LA $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ (nad stejným polem), $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$, pokud

i) $\mathcal{G}$ jako vekt. prostor je přímý součet $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$:

$\forall V \in \mathcal{G} \quad \exists$ jednoznačný rozklad $V = V_1 + V_2$,

$V_i \in \mathcal{G}_i$ a $\mathcal{G}_i$ jsou samy o sobě vekt. prostory,

splňující $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \{0\}$ (... nulový vektor)

ii) $\forall V_1 \in \mathcal{G}_1$ & $\forall V_2 \in \mathcal{G}_2 : [V_1, V_2] = 0$

• je-li $e_1, \dots, e_n$ báze $\mathcal{G}$, potom ji lze uspořádat tak, že $e_1, \dots, e_m$ je báze $\mathcal{G}_1$ a $e_{m+1}, \dots, e_n$ báze $\mathcal{G}_2$ a platí $[e_i, e_j] = 0$ pro $i \leq m$ & $j > m$.

• také $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 = \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathcal{G}_1$ & $X_2 \in \mathcal{G}_2\}$ s komutátorem

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$$

<u>Věta:</u> Každá poloprostá LA $\mathcal{G}$ je buď prostá nebo je přímým součtem prostých LA,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_k$$

kde $\mathcal{G}_i$ jsou prosté ideály $\mathcal{G}$ a tento rozklad je jednoznačný.

$\Rightarrow$ studium poloprostých LA se redukuje na studium prostých LA

<u>Dk:</u> Cornwell, Vol. 2, str. 824

<u>Věta:</u> Nechť G_1 a G_2 jsou lin. LG dimenzí n_1 a n_2 a nechť $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ jsou jejich LA. Potom $G = G_1 \otimes G_2$ je lin. LG dimenze (n_1+n_2) a její LA je izomorfní

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$$

<u>Dk:</u> • prvky LG G_1 jsou matice $n_1 \times n_1$ A^1, které v okolí $\mathbb{1}$ můžeme parametrizovat n_1 souřadnicemi $x^1_1, \dots, x^1_{n_1}$

. analog. pro G_2 : $A^2, \{x^2_i\} \equiv x_{n_1+1}, \dots x_{n_1+n_2}$

$\Rightarrow$ množina G matic $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$ $A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ tvoří grupu $\sim G_1 \otimes G_2$ (Dcv.)

• báze přísl. LA je tvořena $n_1 + n_2$ maticemi dimenze $(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)$

$$(a_p)^j{}_k = \left.\frac{\partial A^j{}_k}{\partial x_p}\right|_{x_i=0} \Rightarrow a_p = \begin{pmatrix} a_p^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad p \leq n_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_p^2 \end{pmatrix} \quad p > n_1$$

$\Rightarrow \mathcal{G} \sim \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$, neboť a_p^i je báze $\mathcal{G}_i$ a

$$[a_p, a_q] = 0 \quad \text{pro } p \leq n_1 \ \& \ q > n_1$$

$\boxtimes$

Věta: Nechť D_1 a D_2 jsou d_1 (d_2)-dim. reprezentace dvou LA G_1 a G_2 nad stejným polem. Potom matice

$$D((X_1, X_2)) = D_1(X_1) \otimes \mathbb{1}_{d_2} + \mathbb{1}_{d_1} \otimes D_2(X_2) \qquad X_i \in G_i$$

tvoří $d_1 d_2$-dim. reprezentaci LA $G = G_1 \oplus G_2$

Dk: Dcv. - stačí ověřit linearitu a komutátor

- $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$

Věta: Nechť G_1 a G_2 jsou reálné LA dvou kompaktních LG a D_1, D_2 jsou IR těchto algeber. Potom repre D definovaná v předchozí větě je IR LA $G = G_1 \otimes G_2$. Navíc každá IR G je ekvivalentní nějaké takto konstruované reprezentaci.

Příklady:

- $SU(n)$ je prostá pro $n \geq 2$
  - spec. pro $SU(2)$ je $\det B = -8$ (viz dříve)

    $\Rightarrow SU(2)$ je poloprostá (Cartan II) $\Rightarrow su(2) = G_1 \oplus G_2$, kde G_i jsou prosté; avšak $\dim su(2) = 3$ a dim prosté LA ≥ 2 (jinak je abelovská) $\Rightarrow su(2) = G_1$ a je prosté
- $SO(2)$ abelovská $\Rightarrow$ není prostá
- $SO(3)$ prostá ($so(3) \simeq su(2)$)
- $SO(4)$ poloprostá: $SO(4) \sim SO(3) \otimes SO(3)$
- $SO(n \geq 5)$ jsou prosté
- $U(1)$ abelovská
- $U(n \geq 2)$ není poloprostá: $u(n) = u(1) \oplus su(n)$