ZKOMPLEXNĚNÍ LA

- jsou-li generátory reálné LA LN i nad polem $\mathbb{C}$,

$$\sum \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

potom je to přímočaré

Př: $su(2)$ jako $\mathbb{R}e$ algebra antiherm. matic

má bázi $e_i = \pm \frac{i}{2} \sigma_i$:

$$e_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_2 \qquad e_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Big/ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \Big/ \Rightarrow [e_i, e_j] = \varepsilon_{ijk} e_k$$

- e_i jsou LN i nad polem $\mathbb{C}$, ale $su(2)_{\mathbb{C}}$ už samozřejmě není algebra antiherm. matic ($i \times$ antiherm $\neq$ antiherm)

- nemusí to ovšem tak být vždy:

Př: • $sl(2,\mathbb{C})$ jako $\mathbb{R}e$ LA je 6-dim (bezestopé mat. 2×2)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- $a_{i+3} = i a_i \Rightarrow$ jako komplexní algebra je jen 3-dim ; $sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}} \sim su(2)_{\mathbb{C}}$

- přitom ale pro $\mathbb{R}e$ algebry platí $sl(2,\mathbb{C}) \sim o(1,3)$ a $o(1,3)_{\mathbb{C}}$ je 6-dim $\Rightarrow$ musí $\exists$ 6-dim komplexní algebra, která je zkomplexněním $sl(2,\mathbb{C})$

ZKOMPLEXNĚNÍ LIBOVOLNÉ LA

- nechť $e_1, \dots, e_n$ je báze Re LA $\mathcal{G}$, která nemusí být LN nad $\mathbb{C}$
- zkonstruujeme $2n$-dim lin. vekt. prostor s prvky (X, Y) pro $X, Y \in \mathcal{G}$ s operacemi

$$\lambda(X,Y) = (\lambda X, \lambda Y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
$$(X,Y) + (X', Y') = (X+X', Y+Y')$$

- z něj vytvoříme komplexní vekt. prostor $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ s operací nás. skalárem z $\mathbb{C}$

$$(\lambda + i\xi)(X,Y) = (\lambda X - \xi Y, \lambda Y + \xi X)$$

$\Rightarrow$ Dcv:

$$z_1[z_2(X,Y)] = (z_1 z_2)(X,Y)$$
$$(z_1+z_2)(X,Y) = z_1(X,Y) + z_2(X,Y)$$
$$z[(X,Y)+(X',Y')] = z(X,Y) + z(X',Y')$$

$\Rightarrow$ je to lin. vekt. prostor

- prostor $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ je <u>n-rozměrný</u>:
  - $\to$ báze je např. $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)$
  - $\to (0, e_j) = i(e_j, 0)$
- na $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ zavedeme komutátor ($[X,Y]$ je komut. z $\mathcal{G}$)

$$[(X,Y),(X',Y')] = ([X,X'] - [Y,Y'], [X,Y'] - [Y,X'])$$

$\Rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ tvoří komplexní LA dimenze n

<u>Dcv:</u> ověřte Jacobiho identitu a antisymetrii

- <u>strukturní konstanty</u> $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$:

$$[(e_i,0),(e_j,0)] = ([e_i,e_j],0) = \sum_k c_{ij}^k (e_k, 0)$$

$\Rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ má stejné strukt. konstanty jako $\mathcal{G}$

- jsou-li e_i samy LN nad $\mathbb{C}$, potom je $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ izomorfní přímočarému zkomplexnění přes zobrazení

$$\phi((X,Y)) = X + iY$$

- stejné strukt. konstanty $\Rightarrow$ $ad_{\mathcal{G}}(e_i) = ad_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}((e_i,0))$

$$\Rightarrow B_{\mathcal{G}}(e_i,e_j) = B_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}((e_i,0),(e_j,0))$$

Cartan II
$\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ poloprostá $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ poloprostá

- pro prosté LA platí pouze

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}} \text{ prostá} \Rightarrow \mathcal{G} \text{ prostá}$$

Př: • $so(1,3)$ prostá, $so(1,3)_{\mathbb{C}}$ není prostá
- je-li $\mathcal{G}$ prostá a $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ není prostá, potom $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ je přímým součtem dvou izomorfních LA:

$$so(1,3)_{\mathbb{C}} \sim su(2)_{\mathbb{C}} \oplus su(2)_{\mathbb{C}}$$

Reprezentace zkomplexněné LA

- je-li $D_{\mathcal{G}}$ repre $\mathcal{G}$, potom $D_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}((e_i,0)) = D_{\mathcal{G}}(e_i)$ je repre $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$:

$$[D_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}((e_i,0)), D_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}((e_j,0))] = [D_{\mathcal{G}}(e_i), D_{\mathcal{G}}(e_j)] = D_{\mathcal{G}}([e_i,e_j])$$

&

$$D_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}([(e_i,0),(e_j,0)]) = D_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}(([e_i,e_j],0)) = D_{\mathcal{G}}([e_i,e_j])$$

// ✓

- stejně z repre $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ dostáváme repre $\mathcal{G}$
- zřejmě $\boxed{D_{\mathcal{G}} \text{ IR} \Leftrightarrow D_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}} \text{ IR}}$

$\Rightarrow$ při hledání IR reálné LA lze přejít k jejímu zkomplexnění

Př: $\underline{su(2) \sim so(3)}$ – IR se obvykle konstruují pomocí posunovacích operátorů $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$, které však existují pouze v komplexní algebře

574

(cf. Example V of Chapter 2, Section 7). For such a transformation

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \tag{17.4}$$

and, conversely, any linear transformation of the form of Equation (17.1) for which Equation (17.4) holds must satisfy Equation (17.2). L is a non-compact linear Lie group (see Example IV of Chapter 3, Section 3).

The set of transformations T for which $\det \Lambda(\mathrm{T}) = 1$ form an invariant subgroup of L called the "*proper* homogeneous Lorentz group", which will be denoted by L_+. The subgroup of L_+ consisting of transformations T such that $\Lambda(\mathrm{T})_{44} > 0$ forms the component of L (and of L_+) that is connected to the identity. This subgroup is known as the "*proper orthochronous* Lorentz group", and is denoted by $\mathrm{L}_+^\uparrow$ (cf. Chapter 3, Section 6). The groups L, L_+ and $\mathrm{L}_+^\uparrow$ are isomorphic to O(3, 1), SO(3, 1) and $\mathrm{SO}_0(3,1)$ respectively (see Chapter 3, Section 6).

The real Lie algebra of $\mathrm{SO}_0(3,1)$ is so(3, 1), which consists of the set of 4×4 real matrices **a** such that

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{17.5}$$

As noted in Example IV of Chapter 13, Section 3, a convenient basis of so(3, 1) is provided by

$$\left.\begin{aligned}
J_1\quad \mathbf{a}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, &
J_2\,\mathbf{a}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
J_3\quad \mathbf{a}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, &
K_1\ \mathbf{a}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
K_2\quad \mathbf{a}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, &
K_3\,\mathbf{a}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

The one-parameter subgroups generated by $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ and $\mathbf{a}_3$ correspond to rotations in $\mathbb{R}^3$ about the axes *Ox*, *Oy* and *Oz* respectively, while the one-parameter subgroups generated by $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$ and $\mathbf{a}_6$ correspond to standard Lorentz transformations along *Ox*, *Oy* and *Oz* respectively.

For $p, q = 1, 2, 3,$

$$\left.\begin{aligned}
J_i\ J_j\quad -\varepsilon_{ijk} J_k\qquad [\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_q] &= -\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_{pqr}\mathbf{a}_r, \\
[J_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} K_k\quad [\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{q+3}] &= -\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_{pqr}\mathbf{a}_{r+3}, \\
[K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} J_k\quad [\mathbf{a}_{p+3}, \mathbf{a}_{q+3}] &= \sum_{r=1}^{3} \varepsilon_{pqr}\mathbf{a}_r,
\end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

where ε_{pqr} is defined in Equations (10.20). The real Lie algebra so(3, 1) is simple, but not compact.

However, with the 4×4 matrices $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_6'$ defined by

$$\left.\begin{aligned}
N^+\qquad \mathbf{a}_p' &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_p + i\,\mathbf{a}_{p+3}), \\
N^-\qquad \mathbf{a}_{p+3}' &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_p - i\,\mathbf{a}_{p+3}),
\end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

for $p = 1, 2, 3$, it follows that

$$\left.\begin{aligned}
N^+, N^+\quad [\mathbf{a}_p', \mathbf{a}_q'] &= -\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_{pqr}\mathbf{a}_r', \\
N^+, N^-\quad [\mathbf{a}_p', \mathbf{a}_{q+3}'] &= 0, \\
N^-, N^-\quad [\mathbf{a}_{p+3}', \mathbf{a}_{q+3}'] &= -\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_{pqr}\mathbf{a}_{r+3}',
\end{aligned}\right\} \tag{17.9}$$

(cf. Example IV of Chapter 13, Section 3). This implies that the complexification $\tilde{\mathscr{L}}$ of $\mathscr{L} = \mathrm{so}(3,1)$ is semi-simple but is *not* simple, and that $\tilde{\mathscr{L}}$ is actually isomorphic to $A_1 \oplus A_1$ (cf. Chapter 14, Section 5).

It is sometimes convenient to use a different notation for the basis elements of so(3, 1) and *define* $\mathbf{L}_{\lambda\mu}(\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$ by

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{L}_{12} &= \mathbf{a}_3, & \mathbf{L}_{23} &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{L}_{31} &= \mathbf{a}_2, \\
\mathbf{L}_{14} &= \mathbf{a}_4, & \mathbf{L}_{24} &= \mathbf{a}_5, & \mathbf{L}_{34} &= \mathbf{a}_6,
\end{aligned}\right\} \tag{17.10}$$

and

$$\mathbf{L}_{\lambda\mu} = -\mathbf{L}_{\mu\lambda} \tag{17.11}$$

(which implies that $\mathbf{L}_{11} = \mathbf{L}_{22} = \mathbf{L}_{33} = \mathbf{L}_{44} = \mathbf{0}$). Comparison of Equations (17.6) and (17.10) shows that

$$(\mathbf{L}_{\lambda\mu})_{\beta\alpha} = -\delta_{\beta\lambda}\, g_{\alpha\mu} + \delta_{\beta\mu}\, g_{\alpha\lambda} \tag{17.12}$$

for all $\lambda, \mu, \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. Then $\mathbf{L}_{\lambda\mu}$ generates a "rotation" in the $\lambda\mu$

- báze J_i, K_i generuje 6-dim. reálnou LA $o(1,3) \sim so(1,3)$ $\sim sl(2,\mathbb{C})$ ... viz pokračí

- budeme-li však uvažovat tuto LA jako komplexní, můžeme přejít k bázi

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm i K_i)$$

s komut. relacemi

$$[N_i^+, N_j^+] = -\varepsilon_{ijk} N_k^+ \qquad \& \qquad [N_i^+, N_j^-] = 0$$

$$[N_i^-, N_j^-] = -\varepsilon_{ijk} N_k^-$$

$\Rightarrow$ zkomplexněná LA

$$so(1,3)_{\mathbb{C}} \sim su(2)_{\mathbb{C}} \oplus su(2)_{\mathbb{C}} \sim sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}} \oplus sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}},$$

neboť zkomplexněním $su(2)$ dostáváme komplexní algebru $sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}}$

- zkomplexnění prosté LA není nutně prostá LA

IREDUCIBILNÍ REPREZENTACE LIEOVÝCH ALGEBER

<u>Def:</u> <u>Casimirův operátor</u> (element) je operátor, který je funkcí generátorů LA a který který komutuje se všemi prvky této algebry:

$$C = C(\{X_i\}) \quad \& \quad [C, X_i] = 0 \quad \forall X_i = \rho_g(e_i)$$

⇒ jedná se o ~~ot~~ invariantní operátory na reprezentačním prostoru <u>LA</u>, které jsou funkcemi (obvykle polynomy) operátorů X_i reprezentujících bázi/generátory LA

- pro IR, $C = \lambda \mathbb{1}$ (Schur)
- IR LA lze indexovat hodnotami ∀ Casimirových operátorů dané LA v dané IR

<u>Př:</u> <u>kvadratický Casimirův operátor</u> poloprosté LA

- poloprostá LA g má nedegenerovanou C-K metriku $g_{ij} = B(e_i, e_j) \Rightarrow \exists$ inverzní matice $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$
- nechť ρ je repre g a $X_i = \rho(e_i)$ jsou operátory reprezentující generátory g

$\Rightarrow \boxed{C = g^{ij} X_i X_j}$ je Casimirův operátor

<u>Dk:</u>
$$[C, X_k] = g^{ij}[X_i X_j, X_k]$$
$$= g^{ij}(X_i X_j X_k - X_k X_i X_j - X_i X_k X_j + X_i X_k X_j)$$
$$= g^{ij} X_i [X_j, X_k] + g^{ij}[X_i, X_k] X_j$$
$$= g^{ij} C_{jk}^{l} X_i X_l + g^{ij} C_{ik}^{l} X_l X_j = \quad / \mathrm{II}: i \leftrightarrow j,\ g_{ij}\ \text{sym} /$$
$$= g^{ij} C_{jk}^{l}(X_i X_l + X_l X_i) = 0 = c_{pjk}\, g^{ij} g^{lp}(X_i X_l + X_l X_i)$$

neboť $/\ C_{jk}^{l} = g^{lp} c_{pjk}\ /$

$g_{ij} = c_{i\alpha}^{\beta} c_{j\beta}^{\alpha}$

$g^{ij} g^{lp}(X_i X_l + X_l X_i)$ je sym $j \leftrightarrow p$ a $c_{pjk} = -c_{jpk}$ (Dk pending)

<u>NB:</u> • bez ohledu na repre lze Casimir. op. (kv.) definovat pomocí duální báze vzhledem ke g: $C = X^i X_i$

• $C_{ijk} = -C_{jik}$:

$$C_{ijk} = g_{il} C^{l}_{jk} = C^{\beta}_{i\alpha} C^{\alpha}_{l\beta} C^{l}_{jk} = -C^{\beta}_{i\alpha} C^{\alpha}_{\beta l} C^{l}_{jk} = -C^{\beta}_{i\alpha} C^{l}_{jk} C^{\alpha}_{\beta l}$$

$$= /\text{Jacobi pro } C^{l} C^{\alpha}/ = C^{\beta}_{i\alpha} C^{l}_{k\beta} C^{\alpha}_{jl} + C^{\beta}_{i\alpha} C^{l}_{\beta j} C^{\alpha}_{kl}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{ijk} = C^{\beta}_{i\alpha} C^{l}_{\beta k} C^{\alpha}_{lj} - C^{\beta}_{i\alpha} C^{l}_{\beta j} C^{\alpha}_{lk}} \qquad (*)$$

$i \leftrightarrow j$

$$\Rightarrow C_{jik} = C^{\beta}_{j\alpha} C^{l}_{\beta k} C^{\alpha}_{li} - C^{\beta}_{j\alpha} C^{l}_{\beta i} C^{\alpha}_{lk}$$

$$= -C^{\alpha}_{il} C^{l}_{\beta k} C^{\beta}_{j\alpha} + C^{l}_{i\beta} C^{\beta}_{j\alpha} C^{\alpha}_{lk}$$

$$= C^{\alpha}_{il} C^{\beta}_{\alpha j} C^{l}_{\beta k} - C^{l}_{i\beta} C^{\alpha}_{lk} C^{\beta}_{\alpha j} = -(*) \quad \boxtimes$$

Def: Rank Lieovy grupy je největší počet vzájemně komutujících operátorů příslušné LA ≡ dimenze maximální abelovské podalgebry

Př:
- translace ve 3D – rank 3 ($p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$ komutují $\forall i$)
- SO(3) – rank 1 ($[J_3, J_3] = 0$, ale $[J_3, J_i] \neq 0$ $i = 1, 2$)
- SU(N) – rank N−1 (algebra bezestopých antiherm. matic ⇒ největší abelovskou podalgebru tvoří matice

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -i \end{pmatrix}$$

kde i je na lib. pozici na diag. a $-i$ na poslední pozici)
- SO(3) ⊗ SO(3) – rank 2 ($J_3^{(1)}, J_3^{(2)}$ ... odpovídá nezávislým částicím)

Věta: (Racahův teorém)

Pro každou poloprostou LAG ranku l existuje l Casimirových operátorů, které komutují nejen se všemi prvky G, ale i mezi sebou:

$$[C_k, X] = 0, \quad [C_k, C_j] = 0 \qquad \forall X \in G, \ \forall j,k = 1, \dots, \text{rank } G$$

Vlastní hodnoty těchto operátorů jednoznačně charakterizují ireducibilní reprezentace příslušné Lieovy grupy.

- pro R, $C_k = \lambda_k \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ v dané R (ρ, V), $C_k \psi = \lambda_k \psi \quad \forall \psi \in V$
  $\Rightarrow$ λ_k lze použít jako „pojmenování" reprezentace
- bázi příslušného invariantního podprostoru lze volit jako vl. vektory komutujících operátorů C_k $(k=1,\dots,\ell)$ a X_i $(i=1,\dots,\ell)$ (především tedy X_i, které dohromady jednoznačně určí $\dim \rho_R$ různých vl. vektorů)

Př: su(2) - rank 1 $\Rightarrow$ $C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J^2$ je jediný Casimirův operátor
$\Rightarrow$ J_3 tvoří max. abelovskou subalgebru

- pomocí posunovacích operátorů zjistíme, že dimenze R mohou být $d_R = 2j+1$, kde j je lib. polocelé číslo: (viz kurz QM ; jedná se o komplexifikovanou LA!)
- $J_\pm = J_1 \pm i J_2$ $\Rightarrow$ $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$
  $[J_+, J_-] = 2J_3$

- vl. vektory J^2, J_3 značíme $|b, m\rangle$
  $J_3 (J_\pm |b, m\rangle) = J_\pm J_3 |b, m\rangle \pm J_\pm |bm\rangle = (m \pm 1) J_\pm |bm\rangle$
  $\Rightarrow$ $J_\pm |b, m\rangle$ je vl. vektor J_3 s vl. číslem $(m \pm 1)$
- jedná se o konečně-dim. repre & vl. vektory jsou LN
  $\Rightarrow$ musí $\exists$ m^+: $J_+ |b, m^+\rangle = 0$ a m^-: $J_- |b, m^-\rangle = \Theta$
- $J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - J_3$
  $\Rightarrow$ $J_- J_+ |b, m^+\rangle = 0 = b - (m^+)^2 - m^+ \Rightarrow b = (m^+ + 1) m^+$
  $\Rightarrow$ značím $m^+ \equiv j$ $\Rightarrow$ $J^2 = j(j+1) \mathbb{1}_{\dim \rho}$
  $\Rightarrow$ $|b = j(j+1), m\rangle \equiv |j, m\rangle$
  $\Rightarrow$ opakovaně aplikuji J_- na $|j, j\rangle$ $\Rightarrow$ $m^- = -j \Rightarrow 2j \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow$ $\dim \rho = 2j+1$

Př: $j=0 \Rightarrow \dim \rho_0 = 1$, $J_i = 0 \ \forall i$, $J^2=0$

$j=\frac{1}{2} \Rightarrow \dim \rho_{1/2} = 2$, $J_i = \frac{i}{2}\sigma_i$, $J^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$, $J_3 = i\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$j=1 \Rightarrow \dim \rho_1 = 3$, $J_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-i \\ 0&i&0 \end{pmatrix}$ $J_2 = \begin{pmatrix} 0&0&i \\ 0&0&0 \\ -i&0&0 \end{pmatrix}$ $J_3 = \begin{pmatrix} 0&-i&0 \\ i&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow J^2 = \begin{pmatrix} 2&0&0 \\ 0&2&0 \\ 0&0&2 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$ (diag)

Př: $so(1,3)$ – reprezentace $so(1,3)$ – algebra $L_+^\uparrow$ a především univ. pokrývací grupy $SL(2,\mathbb{C})$ – dostaneme jako reprezentace zkomplexněné $so(1,3)_\mathbb{C} \sim su(2)_\mathbb{C} \oplus su(2)_\mathbb{C}$

PŘEDPOČÍTAT

- $(0,0)$ – triviální reprezentace $N_i^+ = N_i^- = 0 \Rightarrow g = e^0 = 1$ (dim = 1, skalární reprezentace)

- $(\frac{1}{2},0)$ – 2-dim reprezentace, $N_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i$, $N_i^- = 0$

$$N_i^- = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = 0 \Rightarrow \boxed{J_i = iK_i}$$

$$N_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = iK_i = J_i$$

$$\Rightarrow J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$$

– reprezentační prostor – (levo)chirální spinory (Weylovy)

- $(0,\frac{1}{2})$ – 2-dim repre, $\boxed{J_i = -iK_i} = \frac{1}{2}\sigma_i$

– (pravo-)chirální Weylovy spinory

- $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ – 4-dim. reprezentace

– reprezentační prostor mohou být buď hermitovské matice 2×2 nebo 4-vektory – viz homomorfismus $SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{na}} L_+^\uparrow$

$\Rightarrow$ je to repre na Mink. časoprostoru

podrobně viz Cornwell, vol. 2

NB: • (j,j') repre pro polocíselné $j+j'$ jsou dvojznačné repre $L_+^\uparrow$ (stačí se podívat na podgrupu rotací)

• proto také $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ musí být 4-vektor – je to jediná jednoznačná 4-dim. reprezentace

Př: Vztah reprezentací $SO(3)$ a $so(3)$

- $so(3) \sim su(2) \Rightarrow \exists$ 2-rozměrná repre $so(3)$ daná reprezentací báze pomocí Pauliho matic (viz dříve):

$$D_g(e_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad D_g(e_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_g(e_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \exp(t D_g(e_3)) = \begin{pmatrix} \exp(\frac{1}{2}it) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2}it) \end{pmatrix} \overset{t \to t+2\pi}{\Longrightarrow} - \begin{pmatrix} \cdot & 0 \\ 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

- přitom v definující 3-dim reprezentaci

$$\exp\left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} ct & st & 0 \\ -st & ct & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{t \to t+2\pi}{\Longrightarrow} + \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ exponenciála 2-dim repre $so(3)$ nedává repre $SO(3)$

(*) víceznačné repre a univ. pokrývací grupa (41b)

Operátorové reprezentace (T jsou lin. operátory na V, ψ_j je báze V)

$$T_G(\exp(tX))\psi_j = \sum \psi_k D_G(\exp(tX))_{kj}$$

$$T_g(X)\psi_j = \sum \psi_k D_g(X)_{kj}$$

$$\Rightarrow \quad (*) \quad T_g(X) = \frac{d}{dt} T_G(\exp(tX))\Big|_{t=0}$$

$$(**) \quad \exp(t T_g(X)) = T_G(\exp(tX))$$

$\Rightarrow T_G$ i T_g působí na stejném V, ψ_j je báze T_G i T_g

Přímý součin reprezentací

- jaká repre LA g odpovídá reprezentaci LG G

$$T_G = T_G^\mu \otimes T_G^\nu \;?$$

$$\Leftrightarrow T_G(\exp tX)(\psi_j^\mu \otimes \varphi_i^\nu) = \sum_{kl} \left[D_G^\mu(\exp tX) \otimes D_G^\nu(\exp tX)\right]_{kl,ji} (\psi_k^\mu \otimes \varphi_l^\nu)$$

$$\left(T_G^\mu(\exp tX)\psi_j^\mu = \sum_k D_G^\mu(\exp tX)_{kj}\psi_k^\mu, \dots \right)$$

- odpovídající reprezentace LA $\mathcal{G}$ jsou

$$T^{\mu}_{\mathcal{G}}(X)\,\psi^{\mu}_{j} = \sum D^{\mu}_{\mathcal{G}}(X)_{kj}\,\psi^{\mu}_{k}\ , \ldots$$

$$(*)\ \Rightarrow T_{\mathcal{G}}(X)(\psi^{\mu}_{j}\otimes\varphi^{\nu}_{i}) = \sum_{kl}\left[D^{\mu}_{\mathcal{G}}(X)\otimes 1\!\!1_{d_\nu} + 1\!\!1_{d_\mu}\otimes D^{\nu}_{\mathcal{G}}(X)\right]_{kl,ji}(\psi^{\mu}_{k}\otimes\varphi^{\nu}_{l})$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left(T^{\mu}_{\mathcal{G}}(X)\psi^{\mu}_{j}\right)\otimes\varphi^{\nu}_{i} + \psi^{\mu}_{j}\otimes\left(T^{\nu}_{\mathcal{G}}(X)\varphi^{\nu}_{j}\right)$$

$\Rightarrow$ reprezentace LA $\mathcal{G}$ odpovídající přímému součinu reprezentací $D^{\mu}\otimes D^{\nu}$ grupy G je dána maticemi

$$\boxed{D_{\mathcal{G}}(X) = D^{\mu}_{\mathcal{G}}(X)\otimes 1\!\!1_{d_\nu} + 1\!\!1_{d_\mu}\otimes D^{\nu}_{\mathcal{G}}(X)} \qquad (+)$$

- protože báze této repre je tvořena přímým součinem bází jednotlivých reprezentací $D^{\mu}_{\mathcal{G}}$ a $D^{\nu}_{\mathcal{G}}$, nazýváme tuto repre přímým součinem reprezentací LA a značíme $D_{\mathcal{G}} = D^{\mu}_{\mathcal{G}}\otimes D^{\nu}_{G}$, přestože maticově to přímý součin není

- pro D^{μ}_{G}, D^{ν}_{G} IR LG G existuje C (matice C-G koeficientů)

$$C^{-1}\left(D^{\mu}_{G}(\exp tX)\otimes D^{\nu}_{G}(\exp tX)\right)C = \bigoplus_{\gamma} \underset{(\mu\nu\gamma)}{\underset{|||}{\alpha^{\gamma}_{\mu\nu}}}\, D^{\gamma}_{G}(\exp(tX))$$

$$\Downarrow$$

$$C^{-1}\left[D^{\mu}_{\mathcal{G}}(X)\otimes 1\!\!1_{d_\nu} + 1\!\!1_{d_\mu}\otimes D^{\nu}_{\mathcal{G}}(X)\right]C = \bigoplus_{\gamma} \underset{(\mu\nu\gamma)}{\underset{|||}{\alpha^{\gamma}_{\mu\nu}}}\, D^{\gamma}_{\mathcal{G}}(X)$$

$\Rightarrow$ C-G koeficienty a C-G řada jsou stejné pro LG i LA

- NB: (+) je repre pro lib. abstraktní LA i bez vztahu k nějaké grupě – (+) je lin. a zachovává komutátor

- v případě $\mu = \nu$ se stejně jako pro grupy rozpadá prostor definovaný $\xi^{\mu}_{j} \otimes \xi^{\mu}_{i}$ na invariantní podprostory symetrických $\left(\frac{1}{2} d_{\mu}(d_{\mu}+1)\right)$ a antisym. $\left(\frac{1}{2} d_{\mu}(d_{\mu}-1)\right)$ součinů $\xi^{\mu}_{j} \otimes \xi^{\mu}_{i} \pm \xi^{\mu}_{i} \otimes \xi^{\mu}_{j}$

$$\Rightarrow D^{\mu} \otimes D^{\mu} \sim (D^{\mu} \otimes D^{\mu})_{sym} \oplus (D^{\mu} \otimes D^{\mu})_{antisym}$$

- <u>Ireducibilní tenzorové operátory</u> v řeči L. algeber:

- pro $T_G(g)$ reprezentaci LG G na V jsou i.t.o. sada operátorů A^{σ}_{n}:

$$T_G(g)\, A^{\sigma}_{n}\, T_G(g)^{-1} = \sum_{m=1}^{d_\sigma} A^{\sigma}_{m}\, D^{\sigma}(g)_{mn}$$

pro $A^{\sigma}_{n} : V \to V$, kde $T_G(g)$ jsou operátory definující působení (reprezentaci) G na V

$$\Rightarrow \Big/ g = \exp(tX), \quad T_{\mathcal{G}}(X) = \frac{d}{dt} T_G(\exp tX)\Big|_{t=0} \Big/ \Rightarrow$$

$$\boxed{[T_{\mathcal{G}}(X), A^{\sigma}_{n}] = \sum_{m=1}^{d_\sigma} A^{\sigma}_{m}\, D^{\sigma}_{\mathcal{G}}(X)_{mn}}$$

- lze samozřejmě definovat i pro $A^{\sigma}_{n} : V \to V'$ a z reprezentace T_G a T'_G na V a V' jako dříve (str 65)

Př: $so(3)$ jako operátorová algebra na $\mathcal{H}$

- NB: $SO(3)$ jako grupa OG matic 3×3 s $\det = 1$ má L. algebru anti-symetrických matic 3×3
- $SO(3)$ jako grupa operátorů na $\mathcal{H}$ - rotace na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

$$f'(\vec{r}) = U(\vec{n}, \varphi) f(\vec{r}) = f(D(\vec{n}, -\varphi)\vec{r})$$

- $D(\vec{n}, \varphi)$ je matice vekt. reprezentace $SO(3)$
- $D(\vec{n}, \varphi) = \exp(-i\varphi A)$ ... $A \in so(3)$ $\quad A = -i n_i J_i$
- $(J_i)_{jk} = -i\varepsilon_{ijk}$ $\qquad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$

- takto jsme zkonstruovali izomorfismus mezi grupou OG matic 3×3 ($\det = 1$) a grupou unitárních operátorů na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$
- odpovídající Lieova algebra:

$$T(A) f(\vec{r}) = \lim_{\varphi\to 0} \frac{1}{\varphi}\left(f(\exp(-\varphi A)\vec{r}) - f(\vec{r})\right) \equiv \left.\frac{dU(n,\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} f(\vec{r})$$

$$= \lim_{\varphi\to 0} \frac{1}{\varphi}\left[f(\vec{r} - \varphi A\vec{r}) - f(\vec{r})\right] = \Big/ \; f(x_0 + \varphi \vec{d}) = f(x_0) + \varphi \frac{\partial f}{\partial x_i} d^i = \varphi d^T \nabla f \; \Big/$$

$$= -\vec{r}^T A^T \nabla f(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(A) = -\vec{r}^T A^T \nabla}$$

obecný operátor z $so(3)$, A antisym.

- báze $so(3)$ jako operátorové algebry:

$$T(J_i) = -r_l (J_i^T)_{lk} \frac{\partial}{\partial x^k} = -r_l (J_i)_{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} = i\varepsilon_{ikl} r_l \frac{\partial}{\partial x_k} = -i\varepsilon_{ilk} r_l \frac{\partial}{\partial x_k}$$

- operátor momentu hybnosti:

$$\vec{L} = -i\hbar(\vec{r}\times\nabla) \Rightarrow L_i = -i\hbar\varepsilon_{ijk} r_j \frac{\partial}{\partial x^k} \Rightarrow T(J_i) = \frac{1}{\hbar} L_i$$

- platí $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$

$$\Rightarrow [T_i, T_j] = \frac{1}{\hbar^2}[L_i, L_j] = \frac{1}{\hbar}\varepsilon_{ijk} L_k = \varepsilon_{ijk} T_k$$

$\Rightarrow$ dostáváme stejnou algebru $so(3)$, reprezentovanou operátory momentu hybnosti na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

Jednoparametrické podgrupy SO(3) a její pokrytí exp. zobrazením

- víme z obecnějšího:

$$\left[R(\vec{n},\varphi)\right]_{ij} = \delta_{ij}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\, n_i n_j - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\varphi$$

- generátory $\Leftrightarrow$ báze algebry: $(J_i)_{jk} = -i\,\varepsilon_{ijk}$
- lze zapsat lib. $R(\vec{n},\varphi)$ jako $\exp(-i\varphi n_\ell J_\ell) \equiv$ prvek nějaké jednoparam. podgrupy příslušné prvku $-i\varphi n_\ell J_\ell \in so(3)$?
- $(-i n_k J_k)_{ij} = -n_k \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ijk} n_k$
- $\boxed{n_k n_k = 1 \quad \& \quad \varepsilon_{ijs}\varepsilon_{kls} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}}$
- $(-i n_k J_k)^2_{ij} = n_k \varepsilon_{kil} n_p \varepsilon_{plj} = n_k n_p \varepsilon_{kil}\varepsilon_{jpl} =$

$$= n_k n_p (\delta_{kj}\delta_{ip} - \delta_{kp}\delta_{ij}) = n_i n_j - \delta_{ij}$$

- $(-i n_k J_k)^3_{ij} = (n_i n_l - \delta_{il})(-n_k \varepsilon_{klj}) = + n_k \varepsilon_{kij} \qquad (\Leftarrow n_l n_k \varepsilon_{klj} = 0)$

$$= +(i n_k J_k)_{ij}$$

- $(i n_k J_k)^4_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$

$$\Rightarrow \left[\exp(i\varphi n_\ell J_\ell)\right]_{ij} = \delta_{ij}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + n_i n_j\left(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots\right) - \varepsilon_{ijk} n_k \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= \delta_{ij}\cos\varphi + n_i n_j (1-\cos\varphi) - \varepsilon_{ijk} n_k \sin\varphi = \left[R(\vec{n},\varphi)\right]_{ij}$$

$\Rightarrow$ jednoparametrické podgrupy pokrývají celou SO(3)

$(\Rightarrow$ SO(3) je exponenciální grupa$)$

· Exponenciální pokrytí SU(2):

· su(2) ~ so(3) s bází $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ & $\sigma_i \sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$
(bezestopé hermitovské matice)

· nejobecnější matice z SU(2) je $A = x_0 \mathbb{1} + i x_i \sigma_i$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + i x_3 & x_2 + i x_1 \\ -x_2 + i x_1 & x_0 - i x_3 \end{pmatrix}$$ & $|a|^2 + |b|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$\Rightarrow x_0 = \cos\varphi$ & $x_i = n_i \sin\varphi$ pro $n_i n_i = 1$

$$\Rightarrow e^{-i\varphi n_i \sigma_i} = \mathbb{1} - i\varphi n_i \sigma_i \underbrace{- \frac{1}{2} n_i n_j \varphi^2 (i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1})}_{= -\frac{\varphi^2}{2}\mathbb{1}} + i\frac{\varphi^3}{3!} n_i \sigma_i \dots$$

$$= \mathbb{1}\cos\varphi - i n_i \sigma_i \sin\varphi \quad \boxtimes$$

$\Rightarrow$ SU(2) je také exp. grupa