Domácí úkol č. 5

Zadáno: 20.12.2018 **Odevzdat do: 10.1.2019**

Homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na $L_+^\uparrow$

Nechť ϕ je homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na grupu vlastních ortochronních Lorentzových transformací $L_+^\uparrow$ (viz cvičení a poznámky na www).

1. *(3 body)* Ukažte, že jádro homomorfismu je $\mathrm{Ker}_\phi = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$. Je třeba ukázat i to, že neexistuje žádná další matice ze $SL(2,\mathbb{C})$, která se zobrazí na identickou transformaci čtyřvektoru.
   Lze ukázat, že obsahuje-li jádro homomorfismu n prvků, potom každý obraz má právě n vzorů jedná se tedy o n-násobné pokrytí. Zkuste...

2. *(3 body)* Zkonstruujte matici $A \in SL(2,\mathbb{C})$, která se při tomto homomorfismu zobrazí na transformaci čtyřvektoru odpovídající rotaci kolem osy x_1 o úhel α.

Pozn.: Homomorfismus ϕ je založen na vzájemně jednoznačném přiřazení čtyřvektoru a hermitovské matice 2×2

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \quad \leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

a následně působení grupy $SL(2,\mathbb{C})$ na prostoru hermitovských matic

$$X \longmapsto \tilde{X} = AXA^\dagger, \qquad A \in SL(2,\mathbb{C})$$