$SO(3)$ – ortog. matice 3×3, $\det = 1$ resp. grupa rotací v $\mathbb{R}^3$ (1)
(sféra o poloměru π se ztotožněnými protějšími body)
– 2-nás. souvislá komp. grupa

$SU(2)$ – unit. matice 2×2, $\det = 1$
– sféra o poloměru 2π, celý povrch odp. $-\mathbb{1}_{2\times 2}$

$L \equiv O(1,3)$ ... grupa transf. Minkowského prostoru s metrikou
$|x|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, zachovávající vzdálenosti:
$|\Lambda x|^2 = |x|^2$

$L_+^\uparrow$ ... vlastní L. grupa – podgrupa L zachovávající orientaci prostoru a směr času (vlastní, ortochronní), $\det \Lambda = 1$
- časupodobné vektory transf. na časupodobné, neobsahuje inverzi / zrcadlení v prostor. souřadnicích $\Rightarrow \boxed{\det \Lambda = 1 \ \& \ \Lambda^0_0 \geq +1}$

$SL(2,\mathbb{C})$ ... regulární matice 2×2, $\det = 1$
... lin. transformace v $\mathbb{C}^2$, bez zrcadlení

$SO(3)$, $SU(2)$ ... 3-rozměrné
$L_+^\uparrow$, $SL(2,\mathbb{C})$ ... 6-rozměrné
– $L_+^\uparrow$ ... 3 rotace, 3 boosty
– $SL(2,\mathbb{C})$ ... 8 reálných parametrů – 2 podmínky $\det = 1$

- lib. prvek z L lze napsat jako součin prvku z $L_+^\uparrow$ krát prvek z množiny $(1, P, T, PT)$

$\Lambda_P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

$\Lambda_T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$

- L nesouvislá, $L_+^\uparrow$ dvojnás. souvislá (stejně jako $SO(3)$)

DVOJNÁSOBNÉ POKRYTÍ
$SU(2) \to SO(3)$

HOMOMORFISMUS $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{na} L_+^\uparrow$

(DVOJNÁSOBNÉ POKRYTÍ)

$$SU(2) \xrightarrow{na} SO(3)$$

1, působení $SL(2,\mathbb{C})$ na Mink. prostoru $M^4 \Rightarrow \phi$

2, ukázat $A \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \phi(A) \in O(3)$

3, ukázat, že ϕ je <u>na</u> $L_+^\uparrow$ – každé $\Lambda \in L^0$ existuje vzor v $SL(2,\mathbb{C})$

4, ukázat souvislost $SL(2,\mathbb{C})$

1, <u>konstrukce homomorfismu</u> $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \to L$

$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M^4 \Rightarrow x$ lze reprezentovat hermitovskou maticí 2×2:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma_i \quad \in \mathcal{X}_{2\times 2}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– přiřazení $x \leftrightarrow \underline{X}$ je vzáj. jednoznačné $\Rightarrow$ mohu <u>definovat působení</u> ϕ $SL(2,\mathbb{C})$ na M^4: $SL(2,\mathbb{C}) \times M^4 \to M^4$

$$\underline{X} \xmapsto{\phi} A\underline{X}A^+ = \hat{\underline{X}} \text{ pro } \underline{X} \sim x \in M^4 \text{ a } A \in SL(2,\mathbb{C}):$$

a) $\underline{X} \in \mathcal{X}_{2\times 2} \Rightarrow \hat{\underline{X}} \in \mathcal{X}$: $(A\underline{X}A^+)^+ = A\underline{X}^+A^+ = A\underline{X}A^+ = \hat{\underline{X}}$

b, $A(B\underline{X}B^+)A^+ = (AB)X(AB)^+ \Rightarrow \phi$ je homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ do grupy transformací na M^4:

- $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})\ \exists \phi(A)$: $\hat{x} = \phi(A)x$, $\hat{x} \leftrightarrow \hat{\underline{X}} = AXA^+$
- $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$; $\mathbb{1}X\mathbb{1} = X \Rightarrow \phi(\mathbb{1}) = E \Rightarrow$ je to homomorf.

c, $\|x\|^2 = \det \underline{X} \Rightarrow \|\hat{x}\|^2 = \det(A\underline{X}A^+) = \det \underline{X} = \|x\|^2$

$\Rightarrow$ zachovává se $\|x\|^2 \Rightarrow$ jedná se opravdu o nějakou L. transformaci: $\phi(A) = \Lambda \in L$

2) $A \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \phi(A) \in O(3)$:

- $A \in SU(2) \Leftrightarrow AA^+ = A^+A = \mathbb{1}$
- $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M^4 \leftrightarrow E_0 = \mathbb{1}_{2\times 2} \Rightarrow A E_0 A^+ = AA^+ = \mathbb{1} = E_0 \leftrightarrow e_0$

  neboli $A \in SU(2)$ zobrazuje e_0 na sebe

$$\Rightarrow \phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & & & \\ 0 & & M(\mathbb{R})_{3\times 3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- $\phi(A) \in L \Rightarrow \|\phi(A)x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow a_i = 0$ ... jinak zůstávají smíš. členy typu $x_0 x_i$

$\Rightarrow \phi(A)$ je ortog. transformace na $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \phi(A) \in O(3)$

(det $\phi(A)$ může být stále ± 1, $\|\phi(A)x\|^2 = \|x\|^2$ nic nedává)

(*) ze souvislosti plyne $SL(2,\mathbb{C})$ do $L_+^\uparrow$, $SU(2)$ do $SO(3)$ - p. 4

(*) • $SL(2,\mathbb{C})$ obloukově souvislá:

$\forall A \in SL(2,\mathbb{C}) \ \exists A(t) \in SL(2,\mathbb{C})$ spojitá křivka taková, že $A(0) = \mathbb{1}$ a $A(1) = A$

- neboli: každou $A \in SL(2,\mathbb{C})$ mohu spojitě spojit s $\mathbb{1}$

$\Rightarrow \phi(A)$ lze spojitě spojit s $\phi(\mathbb{1}) = E$, ale to platí jen pro souvislou podgrupu $L_+^\uparrow \subset L$

$\Rightarrow \phi$ zobrazuje $SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{do}} L_+^\uparrow$

- stejně tak $SU(2)$ je souvislá $\Rightarrow$ zobrazuje do souvislé podgrupy $SO(3) \subset O(3)$

Podrobněji:

$A \in SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \exists$ Jordanův tvar

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$$

- B ... podobnostní trce
- $\det A = 1$

$$\Rightarrow A(t) = B \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & a^{-1}(t) \end{pmatrix} B^{-1} \quad \& \quad \begin{matrix} a(0) = 1, & b(0) = 0 \\ a(1) = a, & b(1) = b \end{matrix}$$

- $a(t), b(t)$ určitě mohu vzít spojité

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{C})$ je souvislá (je dokonce jednoduše souvislá - je to univ. pokrývací grupa $L_+^\uparrow$ resp. příslušné (A))

4) každou vlastní LT lze složit z boostu ve směru x_3 a rotací kolem x_3 a x_2 $\Rightarrow$ ϕ je "na": (5)

$\forall \Lambda \in L_+^\uparrow \ \exists A \in SL(2,\mathbb{C}) : \phi(A) = \Lambda$

• konkrétně: $\Lambda = R_1 \Lambda^z R_2$, kde R_i jsou rotace, které lze zapsat jako

$R_i = R_i^z(\phi) R_i^y(\vartheta) R_i^z(\psi)$ ... Eulerovy úhly

Dk:

• $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\Lambda e_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \exists$ rotace ς : $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{x}| \end{pmatrix} = \varsigma \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \varsigma \Lambda e_0$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{x}| \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + |\vec{x}| & 0 \\ 0 & x_0 - |\vec{x}| \end{pmatrix}$

• $M_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ je boost ve směru $\langle z \rangle$; volím

$r^2 = x_0 - |\vec{x}| > 0$ (vl. LT transf. časupodobné vektory na časupodobné):

• $\|e_0\|^2 = 1 = \|\Lambda e_0\|^2 = x_0^2 - |\vec{x}|^2 = (x_0 - |\vec{x}|)(x_0 + |\vec{x}|)$

$\Rightarrow x_0 - |\vec{x}| = (x_0 + |\vec{x}|)^{-1}$

$\Rightarrow x_0^2 = 1 + |\vec{x}|^2 \geq 1$

$\Rightarrow x_0 \geq 1$ & $x_0 + |\vec{x}| \geq 1 \Rightarrow x_0 - |\vec{x}| > 0$

$M_r \begin{pmatrix} x_0 + |\vec{x}| & 0 \\ 0 & x_0 - |\vec{x}| \end{pmatrix} M_r^+ = \begin{pmatrix} r^2(x_0 + |\vec{x}|) & 0 \\ 0 & \frac{x_0 - |\vec{x}|}{r^2} \end{pmatrix} = / r^2 = x_0 - |\vec{x}| / = \mathbb{1}$

& $1 = x_0^2 - |\vec{x}|^2 = (x_0 - |x|)(x_0 + |x|)$

$\Rightarrow \boxed{\phi(M_r) \varsigma \Lambda e_0 = e_0}$

$\Rightarrow \phi(M_r)\varsigma\Lambda$ je rotace $R_2 \Rightarrow \Lambda = \varsigma^{-1}[\phi(M_r)]^{-1} R_2$

$\Rightarrow \boxed{\Lambda = R_1 \Lambda_v^z R_2}$ ze 2, plyne také $SU(2) \xrightarrow{na} SO(3)$ (lze také působit $SU(2)$ na $\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ libovolnou vlastní LT umím reprezentovat v $SL(2,\mathbb{C})$

$\Rightarrow \phi : SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{na} L_+^\uparrow$ / pokrytí je dvojnásobné - viz DÚ