Příklad: $sl(2,\mathbb{R})$ – bezestopé matice 2×2 (prostá algebra)

- báze algebry je např.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- strukt. konstanty

$$[X_1, X_2] = 2X_2 \quad \Rightarrow \quad C_{12}^{2} = 2 = -C_{21}^{2}$$

$$[X_1, X_3] = -2X_3 \quad \Rightarrow \quad C_{13}^{3} = -2 = -C_{31}^{3}$$

$$[X_2, X_3] = X_1 \quad \Rightarrow \quad C_{23}^{1} = 1 = -C_{32}^{1}$$

- adjungovaná reprezentace $sl(2,\mathbb{R})$

$$(ad(X_i))_{jk} = C_{ij}^{k}$$

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad ad(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- K-C metrika:

$$g_{ij} = Tr(ad(X_i)ad(X_j)) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ diagonalizací v bázi $X_1,\ X_\pm = X_2 \pm X_3$ dostáváme

$$g = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X_1 \\ X_+ \\ X_- \end{array} \end{array}$$

$$X_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tX_-) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kružnice } S^1$$

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tX_+) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tX_1) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nekompaktní varieta M

$\Rightarrow$ varieta $Sl(2,\mathbb{R})$ je $S^1 \times M$ (více v DÚ)

- obecně tedy mohu psát pro každou $V \in sl(2,\mathbb{R})$

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \exp \qquad\qquad \downarrow \exp$$

(symbolicky, matice nekomutují! (*))

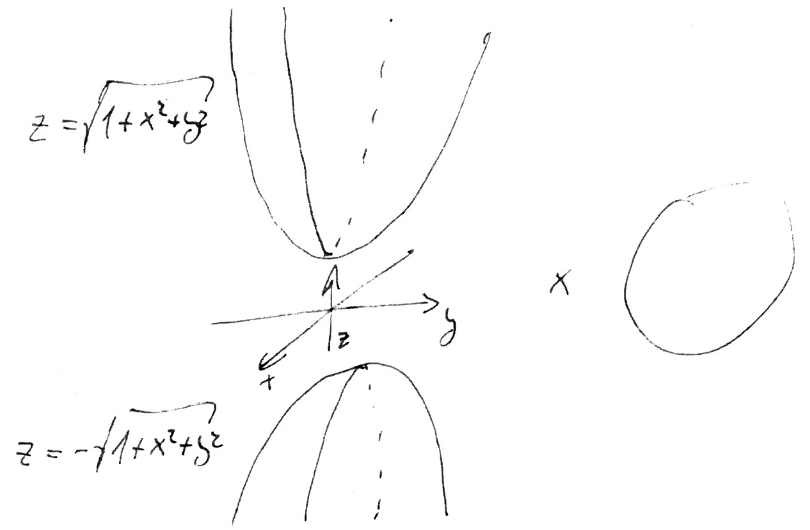
$$g = \begin{pmatrix} z+y & x \\ x & z-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos c & \sin c \\ -\sin c & \cos c \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \exp\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} r + \frac{a \operatorname{sh} r}{r} & \frac{b \operatorname{sh} r}{r} \\ \frac{b \operatorname{sh} r}{r} & \operatorname{ch} r - \frac{a \operatorname{sh} r}{r} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z+y & x \\ x & z-y \end{pmatrix}$$

$(r^2 = a^2 + b^2)$

přitom $\det g_1 = 1 = z^2 - x^2 - y^2$

$\Rightarrow$ varieta je $H^2 \times S^1$ ... hyperboloid $\times$ kružnice



<u>NB:</u> exponenciací dostáváme jen $z = \cosh r > 0$!

$\Rightarrow$ jen část $H^2_+ \times S_1$

(*) $\begin{pmatrix} \cos c & \sin c \\ -\sin c & \cos c \end{pmatrix}$ je ovšem podgrupa $SL(2,\mathbb{R})$ izomorfní $SO(2)$

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{R}) = SO(2) + g_1 \cdot SO(2) + \dots + g_n \cdot SO(2)$

$\Rightarrow$ $\forall$ prvky lze zapsat jako $g = A \cdot B$, kde

A je sym. mat a $B \subset SO(2)$, přitom $\det A = \det B = 1$

$$A = (gg^T)^{1/2}$$

$$B = A^{-1} g$$

<u>Cartan:</u> pro prosté grupy; exp(kompaktní gen) $\times$ exp(nekomp. gen)

pokrývá celou grupu