Podgrupy $GL(n,\mathbb{K})$

$A \in G$, $a \in g$ $\qquad \eta = \mathrm{diag}(\overbrace{1,1,\dots}^{r},\overbrace{-1,-1,\dots}^{s})$; $n = r+s$

grupa	$GL(n,\mathbb{R})$	$SL(n,\mathbb{R})$	$O(r,s)$	$SO(r,s)$	$GL(n,\mathbb{C})$	$U(n)$	$SU(n)$
omezení na A	$\det A \neq 0$	$\det A = 1$	$A^T \eta A = \eta$	$\overset{+}{\det} A = 1$	$\det A \neq 0$	$A^+ A = \mathbb{1}$	-〃+ $\det A = 1$
algebra	$gl(n,\mathbb{R})$	$sl(n,\mathbb{R})$	$o(r,s)$	$\sim so(r,s)$	$gl(n,\mathbb{C})$	$u(n)$	$su(n)$
omezení na a	—	$\mathrm{Tr}\, a = 0$	$(\eta a)^T = -\eta a$	-〃-	—	$a^+ = -a$	-〃+ $\mathrm{Tr}\, a = 0$
dimenze	n^2	n^2-1	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$2n^2$	n^2	n^2-1

- dim $u(n)$: imag. diagonála $\Rightarrow n$, Re a Im části mimodiag $\Rightarrow 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}$

Dodatek: $GL(1,\mathbb{R})$ vs. $(\mathbb{R},+)$

- $GL(1,\mathbb{R})$ jsou $\mathbb{R}$ čísla bez nuly s op. násobení
  - báze $\mathcal{L}(GL(1,\mathbb{R}))$ je $\{x\frac{\partial}{\partial x}\}$ $\Rightarrow$ $V_a = a x \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{L}$
  - $gl(1,\mathbb{R})$ je komutativní algebra $\mathbb{R}$ čísel

- $(\mathbb{R},+)$ ... $\forall$ $\mathbb{R}$ čísla s operací sčítání
  - globální mapa je přímo číslo x
  - levé posunutí $L_a x = x + a$
  - báze T_e : $\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $V_c = c\frac{\partial}{\partial x} \in T_e$
  - $V_c(x) = C(x)\frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{L}$:

$$(L_y)_* C(x_0)\frac{\partial}{\partial x_0} = C(x_0)\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x} = C(x)\frac{\partial}{\partial x} = C(x_0)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow C(x) = C(e) = c$$

$\Rightarrow V_c(x) = c\frac{\partial}{\partial x}$, báze $\mathcal{L}$ je $\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ dostáváme komut. algebru izomorfní $gl(1,\mathbb{R})$

- $(\mathbb{R},+)$ je ovšem izomorfní jen souvislé komponentě $GL^+(1,\mathbb{R})$ skrze izomorfismus $x \mapsto e^x$

$$(\mathbb{R},+) \to GL(1,\mathbb{R})$$