Domácí úkol č. 4

Zadáno: 11.12.2020 **Odevzdat do: 8.1.2021**

Domácí úkoly odevzdávejte ve formátu pdf prostřednictvím určeného webového rozhraní, po termínu e-mailem. Pozdní odevzdání je penalizováno srážkou 10% za každý započatý den.

Grupa $GA(1,\mathbb{R})$

Grupa $GA(1,\mathbb{R})$ je grupa lineárních transformací typu

$$x' = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Jedná se tedy o dvouparametrickou Lieovu grupu, jejíž prvky jsou určeny dvojicí parametrů $g = g(a, b)$.

1. *(5 bodů)* Najděte levoinvariantní vektorová pole této grupy a ve vhodné bázi určete strukturní konstanty příslušné Lieovy algebry.
2. *(5 bodů)* Najděte jednoparametrickou podgrupu této grupy, odpovídající obecnému prvku Lieovy algebry.

Grupa $SL(2,\mathbb{R})$

Grupa $SL(2,\mathbb{R})$ je grupa reálných matic $A_{2\times 2}$ s determinantem $\det A = 1$.

1. *(9 bodů)* Najděte jednoparametrické podgrupy této grupy a stopy matic těchto podgrup.
   Návod: Napište obecný tvar matice $C \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ a spočtěte přímo $\exp(tC)$ v závislosti na znaménku $\det C$.
2. *(3 body)* Ukažte, že exponenciální zobrazení nepokrývá celou nekompaktní grupu $SL(2,\mathbb{R})$, přestože je tato grupa souvislá.

Homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na $L_+^\uparrow$

Nechť ϕ je homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na grupu vlastních ortochronních Lorentzových transformací $L_+^\uparrow$ (viz cvičení a poznámky na www).

1. *(3 body)* Ukažte, že jádro homomorfismu je $\mathrm{Ker}_\phi = \{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$. Je třeba ukázat i to, že neexistuje žádná další matice ze $SL(2,\mathbb{C})$, která se zobrazí na identickou transformaci čtyřvektoru.
   Lze ukázat, že obsahuje-li jádro homomorfismu n prvků, potom každý obraz má právě n vzorů jedná se tedy o n-násobné pokrytí. Zkuste...
2. *(3 body)* Zkonstruujte matici $A \in SL(2,\mathbb{C})$, která se při tomto homomorfismu zobrazí na transformaci čtyřvektoru odpovídající rotaci kolem osy x_1 o úhel α.

Pozn.: Homomorfismus ϕ je založen na vzájemně jednoznačném přiřazení čtyřvektoru a hermitovské matice 2×2

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \quad \leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

a následně působení grupy $SL(2, \mathbb{C})$ na prostoru hermitovských matic

$$X \longmapsto \tilde{X} = AXA^\dagger, \qquad A \in SL(2, \mathbb{C})$$