$SO(3)$ - ortog. matice 3×3, det $=1$ resp. grupa rotací v $\mathbb{R}^3$ (1)

(sféra o poloměru π se ztotožněnými protějšími body)

- 2-nás. souvislá komp. grupa

$SU(2)$ - unit. matice 2×2, det $=1$

- sféra o poloměru 2π, celý povrch odp. $-\mathbb{1}_{2\times 2}$

$L \equiv O(1,3)$ ... grupa transf. Minkowského prostoru s metrikou $|x|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, zachovávající vzdálenosti:

$|\Lambda x|^2 = |x|^2$

$L_+^\uparrow$ ... vlastní L. grupa - podgrupa L zachovávající orientaci prostoru a směr času (vlastní, ortochronní), det $\Lambda = 1$

- časupodobné vektory transf. na časupodobné, neobsahuje inverzi / zrcadlení v prostor. souřadnicích $\Rightarrow \boxed{\det \Lambda = 1 \ \& \ \Lambda^0_0 \geq +1}$

$SL(2,\mathbb{C})$ ... regulární matice 2×2, det $=1$

... lin. transformace v $\mathbb{C}^2$, bez zrcadlení

$SO(3)$, $SU(2)$ ... 3-rozměrné

$L_+^\uparrow$, $SL(2,\mathbb{C})$ ... 6-rozměrné

- $L_+^\uparrow$ ... 3 rotace, 3 boosty
- $SL(2,\mathbb{C})$ ... 8 reálných parametrů - 2 podmínky det$=1$

- lib. prvek z L lze napsat jako součin prvku z $L_+^\uparrow$ krát prvek z množiny $(1, P, T, PT)$

$\Lambda_P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

$\Lambda_T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$

- L nesouvislá, $L_+^\uparrow$ dvojnás. souvislá (stejně jako $SO(3)$)

DVOJNÁSOBNÉ POKRYTÍ

$SU(2) \to SO(3)$

HOMOMORFISMUS $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{na} L_+^\uparrow$

(DVOJNÁSOBNÉ POKRYTÍ)

$$SL(2,\mathbb{C}) \cup SU(2) \xrightarrow{na} SO(3) \subset L_+^\uparrow$$

1, působení $SL(2,\mathbb{C})$ na Mink. prostoru $M^4 \Rightarrow \phi$

2, ukázat $A \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \phi(A) \in O(3)$

3, ukázat, že ϕ je <u>na</u> $L_+^\uparrow$ – každé $\Lambda \in L^0$ existuje vzor v $SL(2,\mathbb{C})$

4, ukázat souvislost $SL(2,\mathbb{C})$

1, <u>konstrukce homomorfismu</u> $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \to L$

$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M^4 \Rightarrow x$ lze reprezentovat hermitovskou maticí 2×2:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma_i \in \mathcal{X}_{2\times 2}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- přiřazení $x \leftrightarrow \underline{X}$ je vzáj. jednoznačné $\Rightarrow$ mohu <u>definovat působení</u> ϕ $SL(2,\mathbb{C})$ na M^4: $SL(2,\mathbb{C}) \times M^4 \to M^4$

$$\underline{X} \xmapsto{\phi} A \underline{X} A^+ = \hat{\underline{X}} \text{ pro } \underline{X} \sim x \in M^4 \text{ a } A \in SL(2,\mathbb{C}):$$

a) $\underline{X} \in \mathcal{X}_{2\times 2} \Rightarrow \hat{X} \in \mathcal{X}$: $(A\underline{X}A^+)^+ = A\underline{X}^+A^+ = A\underline{X}A^+ = \hat{\underline{X}}$

b, $A(B\underline{X}B^+)A^+ = (AB)X(AB)^+ \Rightarrow \phi$ je homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ do grupy transformací na M^4:

- $\forall A \in SL(2,\mathbb{C})\ \exists \phi(A)$: $\hat{x} = \phi(A)x$, $\hat{x} \leftrightarrow \hat{\underline{X}} = AXA^+$
- $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$; $\mathbb{1} X \mathbb{1} = X \Rightarrow \phi(\mathbb{1}) = E \Rightarrow$ je to homomorf.

c, $\|x\|^2 = \det \underline{X} \Rightarrow \|\hat{x}\|^2 = \det(A\underline{X}A^+) = \det \underline{X} = \|x\|^2$

$\Rightarrow$ zachovává se $\|x\|^2 \Rightarrow$ jedná se opravdu o nějakou L. transformaci: $\phi(A) = \Lambda \in L$

2, $A \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \phi(A) \in O(3)$:

- $A \in SU(2) \Leftrightarrow AA^+ = A^+A = \mathbb{1}$
- $e_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in M^4 \leftrightarrow E_0 = \mathbb{1}_{2\times 2} \Rightarrow A E_0 A^+ = AA^+ = \mathbb{1} = E_0 \leftrightarrow e_0$

  neboli $A \in SU(2)$ zobrazuje e_0 na sebe

$$\Rightarrow \phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \\ 0 & \\ 0 & M(\mathbb{R})_{3\times 3} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

- $\phi(A) \in L \Rightarrow \|\phi(A)X\|^2 = \|X\|^2 \Rightarrow a_i = 0$ ... jinak zůstávají smíš. členy typu X_0X_i

$\Rightarrow \phi(A)$ je ortog. transformace na $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \phi(A) \in O(3)$

(det $\phi(A)$ může být stále ± 1, $\|\phi(A)x\|^2 = \|X\|^2$ nic nedává)

(*) ze souvislosti plyne $SL(2,\mathbb{C})$ do $L_+^\uparrow$, $SU(2)$ do $SO(3)$ - p. 4

3, $\phi : SL(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$ je na:

a, $U_\vartheta = \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta}\end{pmatrix} \longmapsto$ rotace kolem X_3 o 2ϑ

b, $V_\alpha = \begin{pmatrix} c\alpha & -s\alpha \\ s\alpha & c\alpha\end{pmatrix} \longmapsto$ rotace kolem X_2 o 2α

$\Big\}\ U, V \in SU(2)$

c, $M_\tau = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{+\tau}\end{pmatrix} \longmapsto$ boost ve směru X_3 s rychlostí $v = \mathrm{tgh}\, 2\tau$ $(c=1)$

- navíc: $U_\vartheta, V_\alpha \in SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$

  $M_\tau \in SL(2,\mathbb{C})$

a, $$U_\vartheta \underline{X} U_\vartheta^+ = \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0+x_3 & (x_1-ix_2)e^{-2i\vartheta} \\ (x_1+ix_2)e^{2i\vartheta} & x_0-x_3\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \tilde{x}_0 = x_0 ;\ \tilde{x}_3 = x_3 ;\ \tilde{x}_1 = x_1 \cos 2\vartheta - x_2 \sin 2\vartheta,\ \tilde{x}_2 = x_1 \sin 2\vartheta + x_2 \cos 2\vartheta$ ⊠

- $\vartheta \in (0, 2\pi) \Rightarrow$ v M^4 se otočíme kolem $\langle x_3\rangle$ $2x$

  $\Leftrightarrow \phi(A) = \phi(-A)$

b, $V_\alpha \underline{X} V_\alpha^+$ stejně

$\Leftrightarrow \tilde{x}_0 = x_0 ;\ \tilde{x}_2 = x_2 ;\ \tilde{x}_1 = x_1 \cos 2\alpha + x_3 \sin 2\alpha ;\ \tilde{x}_3 = x_3 \cos 2\alpha - x_1 \sin 2\alpha$ ⊠

c, $M_\tau \underline{X} M_\tau^+ = \begin{pmatrix} e^{-2\tau}(x_0+x_3) & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & e^{+2\tau}(x_0 - x_3) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \tilde{x}_0 = x_0 \cosh 2\tau - x_3 \sinh 2\tau$
$\tilde{x}_3 = -x_0 \sinh 2\tau + x_3 \cosh 2\tau$

$\Leftrightarrow$ L.T. ve směru x_3 s rychlostí $v = \tanh(2\tau)$:

$\tilde{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x_0 - v x_3)$ & $v^2 = \mathrm{tgh}^2 \sigma$

$\mathrm{ch}^2\sigma - \mathrm{sh}^2\sigma = 1 \Rightarrow 1 - \mathrm{tgh}^2\sigma = \frac{1}{\cosh^2\sigma} = 1 - v^2$

$v = \mathrm{tgh}\,\sigma = \frac{\sinh\sigma}{\cosh\sigma} \Rightarrow \sinh\sigma = v \cdot \cosh\sigma = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$

$\Rightarrow \tilde{x}_0 = x_0 \cosh 2\tau - x_3 \sinh 2\tau$ ✓

(*) • $SL(2,\mathbb{C})$ obloukově souvislá:
$\forall A \in SL(2,\mathbb{C})$ $\exists A(t) \in SL(2,\mathbb{C})$ spojitá křivka taková, že $A(0) = \mathbb{1}$ a $A(1) = A$

• neboli: každou $A \in SL(2,\mathbb{C})$ mohu spojitě spojit s $\mathbb{1}$

$\Rightarrow \phi(A)$ lze spojitě spojit s $\phi(\mathbb{1}) = E$, ale to platí jen pro souvislou podgrupu $L_+^\uparrow \subset L$

$\Rightarrow \phi$ zobrazuje $SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{do}} L_+^\uparrow$

• stejně tak $SU(2)$ je souvislá $\Rightarrow$ zobrazuje do souvislé podgrupy $SO(3) \subset O(3)$

Podrobněji:

$A \in SL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow \exists$ Jordanův tvar

$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} B^{-1}$ • B ... podobnostní trce • $\det A = 1$

$\Rightarrow A(t) = B \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & a^{-1}(t) \end{pmatrix} B^{-1}$ & $a(0) = 1,\ b(0) = 0$; $a(1) = a,\ b(1) = b$

• $a(t), b(t)$ určitě mohu vzít spojité

$\Rightarrow SL(2,\mathbb{C})$ je souvislá (je dokonce jednoduše souvislá – je to univ. pokrývací grupa $L_+^\uparrow$ resp. příslušné LA)

4) každou vlastní LT lze složit z boosku ve směru x_3 a rotací kolem x_3 a x_2 $\Rightarrow$ ϕ je "na": (5)

$$\forall \Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow} \ \exists A \in SL(2,\mathbb{C}) : \phi(A) = \Lambda$$

• konkrétní: $\Lambda = R_1 \Lambda^z R_2$, kde R_i jsou rotace, které lze zapsat jako

$$R_i = R_i^z(\phi) R_i^y(\vartheta) R_i^z(\psi) \ \ldots \text{ Eulerovy úhly}$$

Dk:

• $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ & $\Lambda e_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \exists$ rotace S : $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{x}| \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = S\Lambda e_0$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{x}| \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + |\vec{x}| & 0 \\ 0 & x_0 - |\vec{x}| \end{pmatrix}$$

• $M_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ je boost ve směru $\langle z \rangle$; volím

$r^2 = x_0 - |\vec{x}| > 0$ (vl. LT transf. časupodobné vektory na časupodobné):

• $\|e_0\|^2 = 1 = \|\Lambda e_0\|^2 = x_0^2 - |\vec{x}|^2 = (x_0 - |\vec{x}|)(x_0 + |\vec{x}|)$

$\Rightarrow x_0 - |\vec{x}| = (x_0 + |\vec{x}|)^{-1}$

$\Rightarrow x_0^2 = 1 + |\vec{x}|^2 \geq 1$

$\Rightarrow x_0 \geq 1$ & $x_0 + |\vec{x}| \geq 1 \Rightarrow x_0 - |\vec{x}| > 0$

$$M_r \begin{pmatrix} x_0 + |\vec{x}| & 0 \\ 0 & x_0 - |\vec{x}| \end{pmatrix} M_r^+ = \begin{pmatrix} r^2(x_0 + |\vec{x}|) & 0 \\ 0 & \frac{x_0 - |\vec{x}|}{r^2} \end{pmatrix} = \Big/ r^2 = x_0 - |\vec{x}| \Big/ = \mathbb{1}$$

& $1 = x_0^2 - |\vec{x}|^2 = (x_0 - |x|)(x_0 + |x|)$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(M_r) S \Lambda e_0 = e_0}$$

$\Rightarrow \phi(M_r) S \Lambda$ je rotace $R_2 \Rightarrow \Lambda = S^{-1}[\phi(M_r)]^{-1} R_2$

$$\Rightarrow \boxed{\Lambda = R_1 \Lambda_v^z R_2}$$

ze 2, plyne také $SU(2) \xrightarrow{\text{na}} SO(3)$ (lze také působit $SU(2)$ na $\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ libovolnou vlastní LT umím reprezentovat v $SL(2,\mathbb{C})$

$\Rightarrow \phi : SL(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{L}_+^{\uparrow}$ / pokrytí je dvojnásobné - viz DÚ