$so(3) \sim su(2)$

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k} \quad \longleftrightarrow \quad R_i(\varphi) = \exp(-i\varphi J_i)$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ldots$$

ERRATUM: – během přednášky jsem chybně identifikoval reálnou $so(1,3)$ a komplexifikovanou $so(1,3)_{\mathbb{C}}$
• VIZ KOMENTÁŘE ČERVENĚ

• $so(3)$ je prostá alg. ranku 1

max. abelovská podalg. je J_3

Racah $\Rightarrow$ hledej jediný Casimir. operátor $\Rightarrow$ je to $J^2 = \sum J_i^2$

$\Rightarrow$ dva komut. operátory $\boxed{J_3 \ \& \ J^2}$

$\Rightarrow$ báze repre. prostoru : $J^2|b,m\rangle = b|b,m\rangle$

$J_3|b,m\rangle = J_3|b,m\rangle$

$\downarrow$ komplexifikace algebry

$J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ ... posun. operátory

$$\boxed{[J_3, J_\pm]} = [J_3, J_1] \pm i[J_3, J_2]$$
$$= i\varepsilon_{312} J_2 \pm i(i\varepsilon_{321} J_1) = iJ_2 \pm J_1 = \boxed{\pm J_\pm}$$

$$\boxed{[J_+, J_-] = 2J_3}$$

$J_3(J_\pm|b,m\rangle) = ?$

$$J_3(J_\pm|b,m\rangle) = / J_3 J_\pm - J_\pm J_3 = \pm J_\pm / = J_\pm J_3|b,m\rangle \pm J_\pm|b,m\rangle = J_\pm(m\pm 1)|b,m\rangle$$

$$\Rightarrow J_\pm |b, m\rangle = |b, m\pm 1\rangle$$

- uvažujme končno-dim. IRREP $\Rightarrow$ $\exists\, m^+ : \; J_+ |b, m^+\rangle = 0$

  $\exists\, m^- : \; J_- |b, m^-\rangle = 0$

$$m^+ : \; J_- J_+ |b, m^+\rangle = 0 = (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2)|b, m^+\rangle = (\underline{J_1^2 + J_2^2} + iJ_1J_2 - iJ_2J_1 + J_3^2 - J_3^2)|b, m^+\rangle$$

$$= (J^2 - J_3^2 - J_3)|b, m^+\rangle = (b - m^{+2} - m^+)|b, m^+\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$b = m^+(m^+ + 1)$$

$\Rightarrow$ def. $m^+ \equiv j$ $\quad \Rightarrow \boxed{b = j(j+1)}$

$$m^- : \quad |j, j\rangle \xrightarrow{J_-} |j, j-1\rangle \xrightarrow{J_-} \dots |j, m^-\rangle \xrightarrow{J_-} 0 \quad \Rightarrow \quad j - m^- \in \mathbb{N}$$

$$|j,j\rangle \equiv |j(j+1), j\rangle$$

$$J_+ J_- |j, m^-\rangle = \dots = (J^2 - J_3^2 + J_3)|j, m^-\rangle = (\underbrace{j(j+1)}_{b} - (m^-)^2 + m^-)|j, m^-\rangle = 0$$

$$\Rightarrow j(j+1) = m^-(m^- - 1) = -m^-(-m^- + 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{m^- = -j}$$

$$\Rightarrow \boxed{2j \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow$ j je polovični število : $j = \frac{k}{2}$

$\Rightarrow$ $\dim \rho_j = 2j + 1$

Př: $j = 0 \Leftrightarrow \dim \mathcal{S}_0 = 1 \quad J_i = J^2 = 0 \quad \forall i \Rightarrow$ triv. repre $so(3)$

$\overset{exp}{\Rightarrow}$ triv. repre $SO(3)$ $\quad R(\varphi) = 1$

$j = \frac{1}{2} \Rightarrow \dim \mathcal{S}_{1/2} = 2 \Rightarrow J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$

$$\Rightarrow J^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \quad \& \quad J_3 = i\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$j = 1 \Rightarrow \dim \mathcal{S}_1 = 3 \Rightarrow J_i \dots$ viz výše

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ diag

$$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_3^d = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

Př: $so(1,3)$

- 6-dim
  - 3 generátory rotací $\quad J_i \quad i = 1, \dots, 3$
  - 3 gen. boostů $\quad K_i \quad i = 1, \dots, 3$

- def. repre:

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & J_i^{(3D)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$K_3 = \dots$

$$(+)\quad \left.\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [K_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k \end{aligned}\right\}$$

$so(1,3)$ jako Re LA

• jedná se už o komplexifikovanou $so(1,3)_{\mathbb{C}}$! (viz poslední stránka)

• ~~komplexifikace~~: ??? viz poslední stránka

$$J_i, K_i \longrightarrow N_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + K_i) \qquad i = 1, \dots, 3$$

$$N_i^- = \frac{1}{2}(J_i - K_i) \qquad i = 1, \dots, 3$$

$$4[N_i^+, N_j^+] = [J_i, J_j] + [K_i, K_j] + [J_i, K_j] + [K_i, J_j]$$

$$= i\varepsilon_{ijk} J_j + i\varepsilon_{ijk} J_j + i\varepsilon_{ijk} K_k - i\varepsilon_{jik} K_k = 2i\varepsilon_{ijk}(J_k + K_k)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow [N_i^+, N_j^+] = i\varepsilon_{ijk} N_k^+ \\ &\Rightarrow [N_i^-, N_j^-] = i\varepsilon_{ijk} N_j^- \\ &\Rightarrow [N_i^+, N_j^-] = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow so(1,3) = so(3) \oplus so(3)$$

$$\Big\downarrow$$

$$D_{so(1,3)}(X = X_1 + X_2) = D_{so(3)}(X_1) \otimes \mathbb{1}_{so(3)} + \mathbb{1} \otimes \tilde{D}_{so(3)}(X_2)$$

$\Rightarrow$ IRREPs $so(1,3)$

1, $(0,0)$ $\Rightarrow$ triv. repre $so(1,3)$

2, $(\frac{1}{2},0)$ $\Rightarrow$ 2 dim repre: $N_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i$, $N_i^- = 0$

$N_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + K_i) = J_i = K_i$, $\quad N_i^- = \frac{1}{2}(J_i - K_i) = 0 \Rightarrow J_i = K_i$

$\Rightarrow J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$, $K_i = \frac{1}{2}\sigma_i$

(levo)chirální Weylovy spinory

3, $(0,\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ $J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ & $K_i = -\frac{1}{2}\sigma_i$ ... (pravo)chir. Weylovy spin.

4, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ... dim = 4 $\Leftrightarrow$ Mink. prostoročas $\Leftrightarrow$ 4-vektory

⋮

Pozn: poločíselné repre (j,j') $[j+j' = \text{poločelé číslo}]$ $\subset A\ so(1,3)$
jsou pro $L_+^{\uparrow}$ jako LG dvojznačné reprezentace!

- $so(1,3)$ jako Re LA je prostá
  - jejími generátory jsou ovšem nehermitovské generátory rotací $\tilde{J}_i = i J_i$, kde J_i jsou matice použité při přednášce
  - při použití sady $\tilde{J}_i, K_i$ dostáváme repre grupy $SO(1,3)$

    jako $D(\vec{\varphi}) = \exp(\vec{\varphi} \cdot \vec{\tilde{J}})$ ... obecná rotace

    $D(\vec{\tau}) = \exp(\vec{\tau} \cdot \vec{K})$ ... obecný boost

komut. relace trochu jiné než (+): u ε_{ijk} nestojí 'i' a alternují znaménka (Cv.)

- naopak J_i, K_i vyžadují

  $D(\vec{\varphi}) = \exp(-i\,\vec{\varphi} \cdot \vec{J})$ vs. $D(\vec{\tau}) = \exp(\vec{\tau} \cdot \vec{K})$

  "křižná" def. exp u !

$\Rightarrow$ proto je Re LA $so(1,3)$ generována $\tilde{J}_i, K_i$ a je prostá

$\Rightarrow$ rozklad $so(1,3)_{\mathbb{C}} = su(2) \oplus su(2)$ dostáváme komplexifikací

$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm i K_i)$, jako u posun. operátorů.