

Úlohy řešené na cvičení

Literatura:

- [Callen] H. B. Callen, Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics (Wiley & Sons, 1985)
- [Kvasnica] J. Kvasnica, Termodynamika (SNTL, 1965)

Týden 1: 4.10.

- *Pfaffovy formy*
 - [Kvasnica, kap. II.11] klasifikace, podmínky integrability obecně, speciální případ tří nezávislých proměnných
 - ověřte integrabilitu, dle potřeby najděte integrační faktory a integrujte tyto formy:
 1. $d\omega_2 = (x^2 + y)dx - xdy$
 2. $d\omega_3 = xdy + dz$
 3. $d\omega_3 = yzdx + xzdy + xyzdz$
- Rovnice adiabaty
 - najděte rovnici adiabaty pro systém s kalorickou stavovou rovnicí

$$U = \frac{5}{2}pV + \alpha$$

Týden 2: 11.10.

- tepelné kapacity
 - odvoďte Meyerův vztah mezi tepelnými kapacitami při konstantním objemu a konstantním tlaku pro obecný jednoduchý systém (viz doplňkový text na [www](#))
- První termodynamický zákon, práce a teplo
 - [Callen], str. 21, cvičení 1 - určete práci a teplo podél libovolné trajektorie mezi dvěma body ve stavovém prostoru, ležícími na téže adiabatě. Rovnice adiabaty daného systému je $p^3V^5 = \text{konst.}$
 - [Callen] p. 24: Problem 1.8-3
Domácí cvičení: Určete znaménko tepla Q_{BC} a účinnost cyklu.

Týden 3: 18.10.

- **Integrace stavových rovnic – fundamentální rovnice**

1. Odvoďte entropickou fundamentální rovnici $S = S(U, V, N)$ s diferenciálem

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN$$

pro jedno-komponentní ideální plyn se stavovými rovnicemi

$$pV = NRT \quad U = cNRT.$$

Chybějící stavovou rovnici pro chemický potenciál μ nahraďte požadavkem na homogenost entropie

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N).$$

2. Odvoďte obecnou podmínku integrability mezi termickou a kalorickou stavovou rovnicí

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p.$$

Využijte záměnnosti druhých derivací podle teploty a objemu funkce

$$S(T, V, N) = S(U(T, V, N), V, N).$$

3. Najděte (molární) entropickou fundamentální rovnici $s = s(u, v)$ van der Waalsova plynu s termickou stavovou rovnicí

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

kde u a v jsou molární vnitřní energie a objem. Chybějící kalorickou stavovou rovnici najděte z podmínky integrability ve tvaru, který je co nejjednodušším zobecněním kalorické rovnice ideálního plynu.

Týden 4: 26.10.

- **Termodynamické stroje**

– Ideální účinnost motoru, chladničky a tepelného čerpadla.

- **Cyklické procesy**

1. Carnotův cyklus (izoterma $T = T_h \rightarrow$ adiabata \rightarrow izoterma $T = T_c \rightarrow$ adiabata) s elektromagnetickým zářením jako pracovní látkou:

- najděte entropickou fundamentální rovnici pro elektromagnetické záření (fotonový plyn) se stavovými rovnicemi

$$U = bVT^4, \quad p = \frac{U}{3V},$$

- určete teplo vyměněné během každé části cyklu a celkovou práci vykonanou během cyklu,
 - ukažte, že účinnost cyklu je ideální ($\eta_e = 1 - T_c/T_h$); rozmyslete, že cyklus má ideální účinnost bez ohledu na pracovní látku.
2. Pro Ottův cyklus (model zážehového motoru: adiabatické stlačení \rightarrow izochorické zahřátí (hoření) \rightarrow adiabatické roztažení \rightarrow izochorické ochlazení) s jedním molem ideálního plynu jako pracovní látkou najděte účinnost jako funkci kompresního poměru.

Týden 5: 2.11.

• Teorém maximální práce

- Dvě tělesa se stejnými tepelnými kapacitami C mají na počátku teploty T_1 a T_2 . Tělesa jsou tuhá a nemohou tedy přímo konat práci.
 - Jakou maximální práci je možné získat, uvedeme-li tělesa do tepelného kontaktu?
 - V jakém rozsahu teplot se může ustálit konečná rovnovážná teplota těles T_f ?
- Uvažujme tři identická tělesa s tepelnými kapacitami C . Jejich počáteční teploty jsou $T_1 < T_2 < T_3$. Cílem je ohřát jedno z těles na maximální možnou teplotu bez změny stavu okolí, tedy pouze kontaktem se zbývajícími dvěma tělesy.
 - Jaká je maximální dosažitelná teplota tohoto tělesa?
 - Jaká je naopak jeho minimální možná teplota?
- Jeden mol jednoatomového ideálního plynu je uzavřen v pístu o počátečním objemu V_i . Jeho teplota je T_i . Plyn uvedeme do tepelného kontaktu s konečným rezervoárem tepla s teplotně-závislou tepelnou kapacitou $C_L = R(2 + aT)$, $a \ll 1$. Počáteční teplota rezervoáru je T_0 . Blíže nespecifikovaným procesem plyn přejde do stavu s dvojnásobným objemem $V_f = 2V_i$ aniž by došlo ke změně jeho teploty ($T_f = T_i$). Jakou maximální možnou práci můžeme z daného procesu získat?

Týden 6: 8.11.

• Vícesložkový ideální plyn

1. Odvoďte entropickou fundamentální rovnici vícesložkového ideálního plynu a identifikujte *směšovací entropii*.
<http://utf.mff.cuni.cz/~kolorenc/TDSFI.2018/idgas.pdf>
2. Ukažte, že tlak vícesložkového ideálního plynu lze vyjádřit jako součet *parciálních tlaků* $p_j \equiv N_j RT/V$.
3. Ukažte, že pro chemický potenciál j -té složky plynu platí

$$\mu_j = RT \ln p_j + f(T)$$

a najděte explicitní tvar funkce $f(T)$. ([Callen], p. 73, Problem 3.4-12)

• Rovnováha

1. tepelná rovnováha, směr toku tepla
2. mechanická rovnováha – [Callen] úlohy 2.7-1, 2.7-3 (str. 53)
3. rovnováha při výměně částic – [Callen] úloha 2.8-1 (str. 55)

Týden 7: 15.11.

• Termodynamické potenciály

1. Legendreovy transformace – viz [Callen] Sec. 5.2 (str. 137)
2. Termodynamické potenciály a jejich diferenciály

Volná energie	$F(T, V, N) = U[T]$	$dF = -SdT - pdV + \mu dN$
Entalpie	$H(S, p, N) = U[p]$	$dH = TdS + Vdp + \mu dN$
Gibbsův potenciál	$G(T, p, N) = U[T, p]$	$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$
Velký kan. potenciál	$\Omega(T, V, \mu) = U[T, \mu]$	$d\Omega = -SdT - pDV - Nd\mu$
3. Interpretace termodynamických potenciálů jako práce nebo teplo v různých procesech
4. Najděte volnou energii, entalpii a Gibbsův potenciál pro jednoduchý ideální plyn

Týden 8: 22.11.

• Redukce derivací

1. Postup redukce derivací – [Callen] Sec. 7-3 (p. 186–189)
2. Dokažte Meyerův vztah $c_v = c_p - T v \alpha^2 / \kappa_T$

3. Vyjádřete

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

pomocí základní sady derivací c_p, α, κ_T a stavových proměnných T, V, p

4. Jouleův-Thomsonův proces – [Callen] Sec. 6-3 (str. 160–166)

Týden 9: 29.11.

- Jouleův-Thomsonův proces pro vdW plyn

- Magnetické systémy

1. Ukažte, že platí

$$\frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{C_H}{C_M}.$$

2. Dokažte „Meyerův vztah“

$$C_H = C_M + \frac{T}{\chi_T} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H^2$$

- Stabilita

1. Pro paramagnetický systém s vnitřní energií $dU = TdS + HdM$ ukažte:

- (a)

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_M \geq 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial M^2}\right)_S \geq 0$$

- (b)

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\right)_M \left(\frac{\partial^2 U}{\partial M^2}\right)_S - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial M}\right) \geq 0$$

- (c)

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_M \leq 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial M^2}\right)_T \geq 0,$$

kde $F(T, M) = U[T]$

- (d) z těchto vztahů odvoďte $C_M > 0, C_H > 0, \chi_T > 0, \chi_S > 0$

Týden 10: 06.12.

- Redukce derivací – aplikace

1. *Magnetické chlazení:* Vlastnosti paramagnetického krystalu jsou popsány izotermickou magnetickou susceptibilitou $\chi_T = A/T$ a kalorickou stavovou rovnicí $U = BT^4$, kde A a B jsou kladné konstanty. Předpokládáme, že tepelná roztažnost krystalu je zanedbatelná a že nulovému vnějšímu poli odpovídá nulová magnetizace.

- (a) Kolik tepla krystal přijme během kvazistatického izotermického zvýšení intenzity magnetického pole z nuly na hodnotu H ?
 - (b) Jak se změní teplota krystalu během následné adiabatické demagnetizace?
2. *Maximální práce:* Jeden mol plynu přejde ze stavu (p_A, v_A, T_A) do stavu $(p_D < p_A, v_D > v_A, T_D = ?)$. Je přitom v kontaktu s lázní o teplotě $T_0 < T_A$. Jakou maximální práci můžeme během tohoto procesu získat? Známe rovnici adiabaty plynu $pv^2 = \text{konst.}$ a dále víme, že při konstantním tlaku $p = p_A$ platí pro jeho tepelnou kapacitu $c_p = Bv^{2/3}$ a pro koeficient tepelné roztažnosti $\alpha = 3/T$.

Týden 11: 13.12.

• Statistická fyzika – mikrokanonický soubor

1. základní teorie – mikrostav a makrostav, princip stejných pravděpodobností, Boltzmannova entropie, termodynamická limita, definice teploty a dalších stavových veličin
2. mikrokanonický popis ideálního plynu uzavřeného v boxu konečného objemu – entropie, stavové rovnice
3. dvouhladinový systém, záporné teploty, Schottkyho anomálie v tepelné kapacitě

Týden 12: 20.12.

• Statistická fyzika – mikrokanonický soubor

1. termodynamická limita entropie ideálního plynu – ekvivalence definice entropie pomocí fázového objemu $\Omega(E)$, fázové slupky $\Gamma_\Delta(E)$ a fázového povrchu $\Sigma(E)$
2. kanonický podsystem mikrokanonického souboru
 - systém velkého počtu kvantových harmonických oscilátorů a pravděpodobnost obsazení konkrétní vibrační hladiny vybraného oscilátoru
 - pravděpodobnostní rozdělení v podsystemu obecně, Gibbsova entropie

Týden 13: 3.1.

• Kanonický soubor (klasický)

1. základní teorie – hustota pravděpodobnosti ve fázovém prostoru, partiční funkce, vztah partiční funkce a volné energie jako fundamentální rovnice, výpočet termodynamických veličin

2. kanonický popis ideálního plynu uzavřeného v boxu konečného objemu – volná energie, stavové rovnice
3. kanonický popis horkého (relativistického) plynu s disperzní relací $\epsilon(\vec{p}) = cp$ – volná energie, stavové rovnice