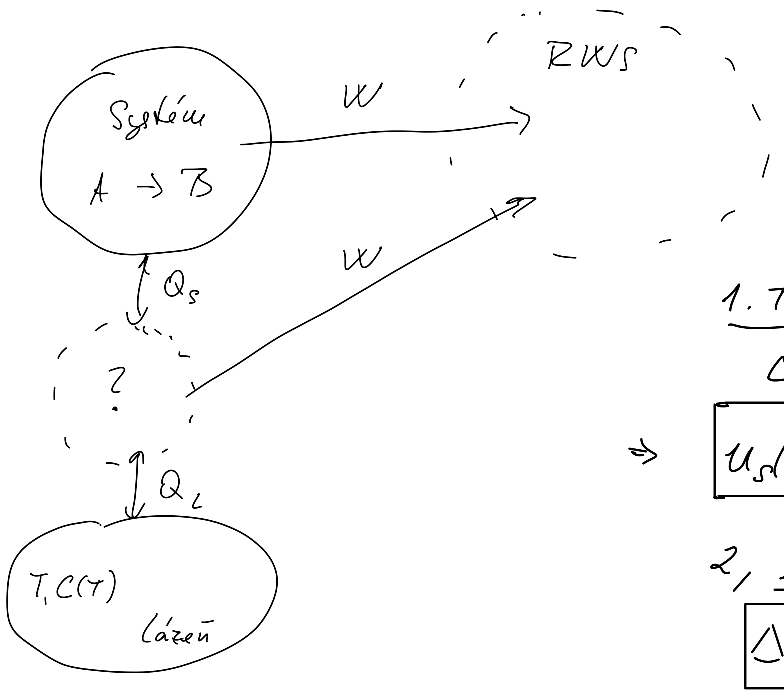
2, Teorém maximální práce (MWT)

Nechť systém S přechází ze specifického počátečního (A) do specifického koncového stavu B. V průběhu procesu je systém v kontaktu s jedním nebo více okolními systémy. Jaký maximální objem práce lze v takovém procesu získat?

Tvrzení: Primární systém přechází ze specifického stavu A do specifického stavu B. V průběhu procesu je v kontaktu s lázní (L, HS), se kterou může vyměňovat teplo, a s dalším systémem (RWS), na který může konat práci.
Ze všech dostupných procesů je zisk práce nejvyšší pro vratný proces a její objem je stejný pro $\forall$ vratné procesy.



Důkaz:

1. TDZ (ZZE)

$$\Delta U_S + \Delta U_L + \Delta U_{RWS} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U_S(B) - U_S(A) + Q_L + W_{RWS} = 0}$$

2, bilance entropie ($\Delta S_{RWS} = 0$)

$$\boxed{\Delta S_S + \Delta S_L \geq 0}$$

(1) $\Rightarrow$ $W_{RWS} = -\Delta U_S - Q_L$ je největší, pokud je Q_L pro daný proces $A \to B$ v prim. syst. nejmenší
$\Leftrightarrow$ pokud je nárůst entropie v lázni nejmenší možný $\Rightarrow$ $\Delta S_L = -\Delta S_S = \underbrace{S_S(B) - S_S(A)}$ $\boxtimes$

~~toto~~ je dáno stavy A, B, nezávisí na vratnosti nebo jiné charakt. procesu

- <u>diferenciální tvar MWT</u>: – jen pro interpretaci, obecně se nedoporučuje k počítání, pokud to není nezbytně nutné

$$dU_S + đW_{RWS} + đQ_L = 0 \qquad dU_S = đQ_S + đW_S = -\frac{T_L}{T_S} đQ_L + đW_S$$

$$T_S đQ_S + T_L đQ_L = 0$$

$$\Rightarrow đW_{RWS} = \left(-đW_S\right) + \left(1 - \frac{T_L}{T_S}\right)\left(-đQ_L\right)$$

práce přímo konaná prim. systémem

práce získaná „těžením" tepla přenášeného mezi syst. a lázní

- <u>Neplatí</u> $đQ_S = -đQ_L$ & $đW_S = -đW_{RWS}$

a to ani v integrální formě $\Rightarrow Q_S \neq -Q_L$, $W_S = -W_{RWS}$

- <u>kuchařka</u>:

0, obecně se procesu „účastní" více podsystémů

1, vždy se snažit pracovat s rovnicemi v integ. formě

2, teorém lze zobecnit na n obecných systémů, které mohou vyměňovat práci i teplo a 1 RWS, který čerpá získanou práci (je neentropický) $\Rightarrow$ MWT je reprezentován 2 rovnicemi:

$$\boxed{\begin{aligned} &i)\ \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i + W_{RWS} = 0 \\ &ii)\ \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = 0 \quad (\geq 0) \end{aligned}}$$

- i, typicky definuje konečný stav systémů, u kterých není a priori znám
- ii, následně ze znalosti konečných stavů dá $W = -\sum \Delta U_i$

3, samozřejmě lze zobecnit – otázka může být odlišná než $W_{RWS}^{max} = ?$

Příklady:

1, Mějme dva systémy s konst. tep. kapacitami C_1, C_2 a počátečními teplotami T_1, T_2. Systémy uvedeme do tep. kontaktu a z přenosu tepla čerpáme práci.

a, Jakoý objem práce můžeme maximálně v procesu získat?

b, V jakém rozsahu teplot se může ustavit konečná rovnováha?

- proces se zastaví ve vzájemné rovnováze: $T_1 \rightarrow T_f \leftarrow T_2$
- systémy nekonají práci, $C \equiv \frac{dQ}{dT}$

$$\Rightarrow dU_i = C_i\, dT_i \quad \Rightarrow \quad \Delta U_i = C_i (T_f - T_i)$$

- $dS_i = \frac{dQ_i}{T_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_i = C_i \log \frac{T_f}{T_i}$

$$\Rightarrow \text{i}, \quad C_1 (T_f - T_1) + C_2 (T_f - T_2) + W_{RWS} = 0$$

$$\text{ii}, \quad \Delta S = C_1 \log \frac{T_f}{T_1} + C_2 \log \frac{T_f}{T_2} \geq 0$$

a, max. práci získáme pro $\Delta S = 0 \Rightarrow T_f^{C_1 + C_2} = T_1^{C_1} T_2^{C_2}$

$$\Rightarrow T_f = \left(T_1^{C_1} T_2^{C_2} \right)^{\frac{1}{C_1 + C_2}} \qquad \left(\text{spec. } C_1 = C_2 \Rightarrow T_f = \sqrt{T_1 T_2} \right)$$

$$\Rightarrow W_{RWS} = C_1 T_1 + C_2 T_2 - (C_1 + C_2) T_f$$

b, • min. konečná teplota odpovídá případu a, - odčerpali jsme maximum energie, co odčerpat lze

- max. teplota odpovídá $W_{RWS} = 0$

$$\Rightarrow T_f^{max} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$$

Př. 2: Předpokládejte v předchozím příkladu, že $T_1 > T_2$ a že neodčerpáváme žádnou práci. Jedná se tedy jen o samovolný přenos tepla a přechod do rovnováhy char. teplotou

$$T_f^{max} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$$

Ukažte, že celková změna entropie

$$\Delta S = C_1 \log \frac{T_f}{T_1} + C_2 \log \frac{T_f}{T_2}$$

je nutně kladná.

(dom. cvičení s bonusem ke zkoušce)

3, Uvažujme 3 stejná tělesa s kapacitami $C_i = C$ v počátečním stavu $T_1 < T_2 < T_3$. Koncový stav je charakterizován požadavkem, aby jedno z nich skončilo na nejvyšší možné teplotě. Jaká je tato max. teplota?

- práci určitě neodebíráme - chceme max. teplotu
- fin. stav je 1 těleso na T_H, 2 tělesa ve vzáj. rovnováze $T = T_C$ (jinak by mezi nimi mohlo téct teplo a čerpadlem bych mohl T_H dále zvýšit

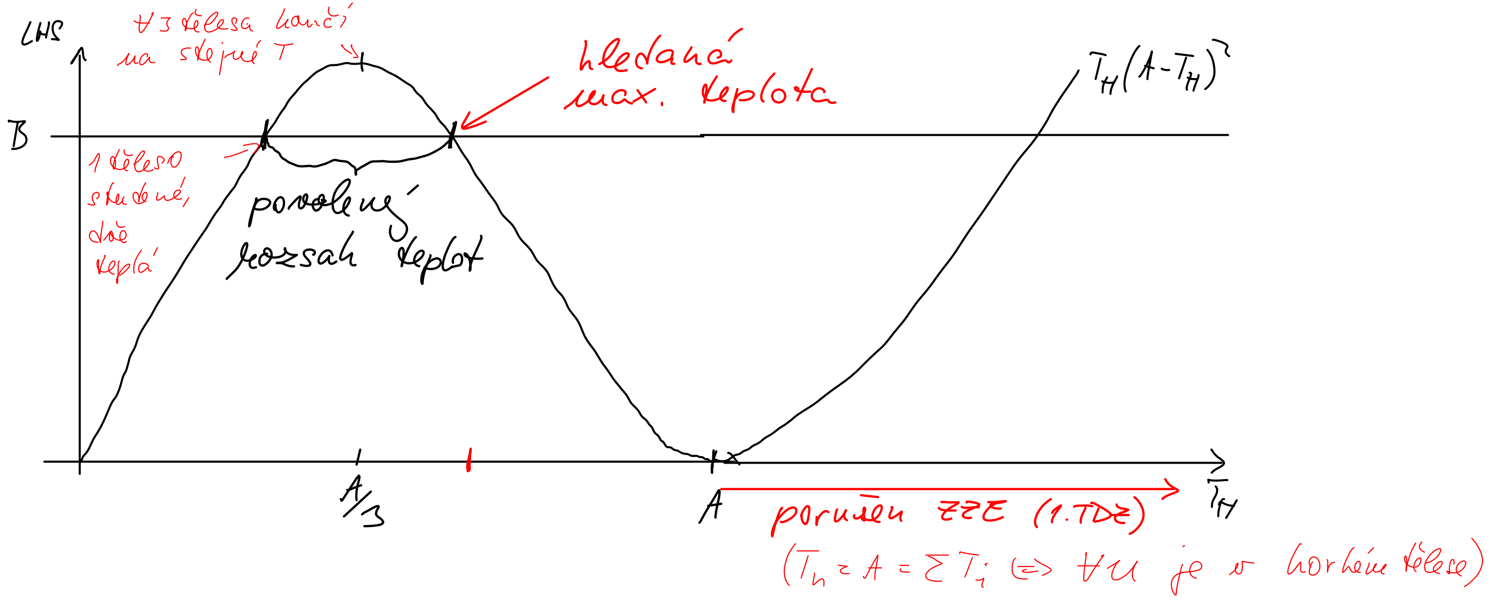
i, $C(T_H - T_3) + C(T_C - T_1) + C(T_C - T_2) = \sum \Delta U_i = 0$

$$\Rightarrow \boxed{T_H + 2T_C = \sum T_i \equiv A}$$

ii, $\Delta S = C \log \left(\frac{T_H T_C^2}{\prod_i T_i} \right) \geq 0 \Rightarrow T_H T_C^2 \geq \prod_i T_i$

$\overset{i}{\Rightarrow} T_C^2 = \frac{1}{4} (A - T_H)^2 \Rightarrow T_H (A - T_H)^2 \geq 4 \prod_i T_i \equiv B$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_H (A - T_H)^2 \geq B}$$



4) 1 mol 1-atom. id. plynu je uzavřen v nádobě o objemu V_i a jeho teplota je T_i. Plyn je uveden do kontaktu s konečným zdrojem tepla s tep. kapacitou $C_e = R(2+aT)$ $(a \ll 1)$, jehož teplota je T_e.

Plyn přejde do konečného stavu def. $V_f = 2V_i$ & $T_f = T_i$ (teplota plynu se tedy nezmění, rovnováha s HS nenastává). Jakou max. práci můžeme z procesu získat?

- $s_{id} = R \log\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^c \left(\frac{V}{V_0}\right)\right] + s_0 \qquad c = \frac{3}{2}$
- $\Delta u_{id} = 0 \Leftarrow T = \text{konst} \;; \quad \Delta s_{id} = R\log 2$
- HS: $T_e \to T_e^f$

$$\Delta S_e = \int_{T_e}^{T_e^f} \frac{C_e(T)}{T}\,dT = \int \frac{R(2+aT)}{T}\,dT = 2R\log\left(\frac{T_e^f}{T_e}\right) + aR(T_e^f - T_e)$$

$$T_e^f:\; \Delta s_{id} + \Delta S_e = 0 \iff \cancel{R}\log 2 + 2\cancel{R}\log\left(\frac{T_e^f}{T_e}\right) + a\cancel{R}(T_e^f - T_e) = 0$$

$$T_e^f = T_e + \delta$$

$$\Rightarrow \log 2 + 2\log\left(1 + \frac{\delta}{T_e}\right) + a\delta = 0$$

- $a \ll 1 \Rightarrow a\delta \sim \log(1 + a\delta)$

$$\Rightarrow \log\left[2\left(1+\frac{\delta}{T_e}\right)^2(1+a\delta)\right] = 0 = 2\log\left[\left(1+\frac{\delta}{T_e}\right)\left(2(1+a\delta)\right)^{1/2}\right]$$

- $(1+\epsilon)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\epsilon$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\delta}{T_\ell}\right)\left(1+\frac{a\delta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ... rovnice pro $\delta = T_\ell^f - T_\ell$ do lin. řádu v a

$$\Rightarrow \delta \Rightarrow T_\ell^f \Rightarrow W_{RWS} = -\Delta U_\ell (T_\ell \to T_\ell^f) = U(T_\ell) - U(T_\ell^f)$$

$$\Delta U_\ell = \int_{T_\ell}^{T_\ell^f} R(2+aT)\,dT = \dots$$
