Integrabilita Pfaffových forem

- Pfaffova forma – lineární dif. forma v diferenciálech nezávislých proměnných (také 1-forma)

$$d\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \qquad (1)$$

- základní otázka: $\exists\, \omega = \omega(x_1, \dots, x_n)$ taková, že (1) je její úplný diferenciál?

- podmínky integrability
  - $\exists\, \omega \Rightarrow A_i = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \Leftrightarrow \vec{A} = \nabla \omega$
  - 3D: $\nabla \times (\nabla \omega) \equiv 0 \Rightarrow \mathrm{rot}\, \vec{A} = 0$
  - obecně:

$$\boxed{\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}} \; (2) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} n(n-1)$ nezávislých podm.

- integrační faktor
  - nechť podmínky integrability (2) nejsou splněny; stále může $\exists$ funkce $\mu = \mu(x_1, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial (\mu A_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\mu A_j)}{\partial x_i}$$

  - neboli $d\sigma = \mu\, d\omega$ je úplný dif. a $\exists\, \sigma = \sigma(x_1 \dots)$

$$\Rightarrow A_i \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = A_j \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_i \frac{\partial \log \mu}{\partial x_j} - A_j \frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = F_{ij} \neq 0} \; (3)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} n(n-1) = \binom{n}{2}$ rovnic pro $\mu = \mu(x_1, \dots, x_n)$

- Příklady

- $k=1$ $\Rightarrow$ triv.
- $k=2$ $\Rightarrow$ 1 PDR pro fci 2 proměnných $\Rightarrow$ μ vždy $\exists$

- rovnice je $d\omega = A_1(x,y)dx + A_2(x,y)dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{A_1(x,y)}{A_2(x,y)} \equiv f(x,y)$$ $\Rightarrow$ rovnice je ekvivalentní obyčejné dif. rovnici

$\Rightarrow$ řešení $\exists$ za velmi obecných podmínek a můžeme ho zapsat ve tvaru

$$\psi(x,y) = k$$

- tento zápis definuje neprotínající-se křivky, číslované hodnotou k

$$\Rightarrow d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\psi/\partial x}{\partial\psi/\partial y} = -\frac{A_1(x,y)}{A_2(x,y)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \lambda(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda(x,y)A_1(x,y) \quad \& \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \lambda(x,y)A_2(x,y)$$

$\Rightarrow$ λ je hledaný int. faktor a pro $k=2$ vždy $\exists$

! $d\psi = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0$ $\Rightarrow$ ψ korektně definuje ekvipotenciály příslušné původní formě

- $k=3$ - 3 PDR pro $\mu = \mu(x_1, x_2, x_3)$

- def. $F_{ij} \equiv -\frac{\partial A_i}{\partial X_j} + \frac{\partial A_j}{\partial X_i}$ $\qquad y_i = \frac{\partial \log\mu}{\partial X_i}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F} \equiv (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

$\Rightarrow$ (3) lze zapsat jako $\boxed{\vec{A}\times\vec{y} = \vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{A}}$

• ekvivalentně také

$$\begin{pmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} = M\vec{y} = \vec{F} \quad ; \quad h(M) = 2 \,!$$

$\Rightarrow$ řešení $\exists$ pouze pokud $\vec{F}$ je lin. kombinací dvou nez. sloupců M

• lze přepsat: $\vec{A} \times \vec{y} = \text{rot}\,\vec{A} \qquad / \vec{A}.$

$$\Rightarrow \quad 0 \equiv \vec{A}.(\vec{A} \times \vec{y}) = \vec{A}.\,\text{rot}\,\vec{A} \qquad \Leftarrow \vec{A} \perp (\vec{A} \times y)\ \forall \vec{y}$$

$\Rightarrow$ ve 3D je forma integrovatelná právě tehdy, když

$$\boxed{\vec{A}.\,\text{rot}\,\vec{A} = 0} \qquad (4)$$

Geometrický význam integračního faktoru (viz Luscombe)

• $\vec{A}$ nevírové:

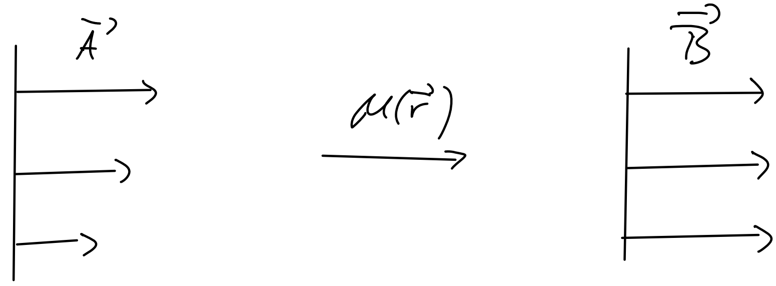
$$\oint \vec{A}.d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_C \vec{A}.d\vec{r} = \Delta\omega$$ závisí pouze na koncových bodech C

• $\vec{A}$ vírové: $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ závisí na trajektorii, ale

mohou existovat speciální trajektorie $\tilde{C}$ takové, že $d\vec{r}$ je všude kolmé na $\vec{A}$

$$\Rightarrow \quad \int_{\tilde{C}} \vec{A}.d\vec{r} = 0$$

• pokud $\exists$ nevírové pole $\vec{B}$ takové, že je ve $\forall$ bodech lokálně kolineární s $\vec{A}$: $\vec{B}(\vec{r}) = \mu(\vec{r})\,\vec{A}(\vec{r})$, potom tyto křivky definují ekvipotenciální plochy (pokrývají celý prostor



Příklady:

1, **k=2:** $d\omega = (x^2+y)dx - x\,dy = 0$

a, ukažte, že lze hledat int. faktor ve tvaru $\mu=\mu(x)$

b, ukažte, že $\mu = \frac{k}{x^2}$

c, ukažte $d\sigma = \mu\, d\omega \Rightarrow \sigma = x + \frac{y}{x^2} + C$

2, **k=3:** $d\omega = yz\,dx + xz\,dy + xyz\,dz$

a, ukažte, že $\exists \mu$ (fce ?)

b, ověřte $\mu = \frac{1}{xyz}$

c, ukažte $\sigma = \log x + \log y + z$

3, $đQ = dU + p\,dV$

a, uvažujte $U = U(p,V) \Rightarrow$

$$đQ = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right] dV$$

b, najděte rovnici pro int. faktor λ:

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V\right]_p = \frac{\partial}{\partial p}\left(\lambda\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p + p\right]\right)_V$$

c, ukažte, že tuto rovnici lze přepsat na

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\lambda + p = -\lambda\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_V = \lambda^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda^{-1}}\right)_V$$