Domácí úkol č. 1

Zadáno: 1.3.2018 **Odevzdat do: 15.3.2018**

1. Tržby v obchodě

Uvažujme následující jednoduchý model denních tržeb Y v obchodě. Do obchodu přijde každý den k náhodných zákazníků, kde k je rozděleno Poissonovsky se střední hodnotou λ. Každý z nich nezávisle na sobě utratí částku X_i, která je rozdělena exponenciálně s parametrem μ. Určete průměrnou denní tržbu $\langle Y \rangle$ a její rozptyl $\sigma = \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}$.

Poissonovské rozdělení

$$p(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, \infty\},\ \lambda > 0$$

Exponenciální rozdělení

$$f(x;\mu) = \mu\,\mathrm{e}^{-\mu x}, \qquad x \in [0, \infty],\ \mu > 0$$

Bonus: Získané výsledky ověřte pomocí simulace.

2. Normální rozdělení

1. Pro $N = 1, 2, 8$ a 12 vygenerujte empirické rozdělovací funkce (normovaný histogram) součtů N náhodných veličin, rozdělených podle uniformního rozdělení, a nafitujte je Gaussovou distribucí. Sledujte konvergenci rozdělovací funkce.

2. Proveďte totéž pro náhodnou veličinu s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \sin(x)$ pro $x \in [0, \pi]$.

3. Box-Mullerovou transformací vygenerujte pár set gaussovsky rozložených náhodných čísel a vykreslete jejich histogram. Porovnejte s očekávanou distribucí.

Výstupem této úlohy by měly být vhodné grafy (hodnotí se i jejich vypovídací hodnota), porovnání vhodných parametrů fitované a očekávané Gaussovy distribuce a podobně. Můžete přiložit i zdrojové kódy použitých programů nebo skriptů.

Box-Mullerova transformace: Máte k dispozici dvě náhodná čísla a a b z uniformního rozdělení. Pomocí triku

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}(r^2)\,\mathrm{d}\phi \tag{1}$$

se z těchto čísel vygenerují dvě gaussovsky rozdělená náhodná čísla x a y.